

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Progettazione Aeronautica

TESI DI LAUREA

**ANALISI DI DIVERSE SIMULAZIONI DI FLUSSI
IN CONDIZIONI DI ALTA PORTANZA**

Relatori

Ch.mo Prof. CARLO de NICOLA

Ch.mo Ing. RENATO TOGNACCINI

Candidato

PAOLO CACCAVALE

Matr. 347/567

Anno Accademico 2001-2002

"Uomo libero sempre amerai il mare

il mare è il tuo specchio

tu contempi l'anima nell'infinito svolgersi dell'onda

e non è meno amaro l'abisso del tuo spirito..."

(da "L'uomo e il mare" C. Baudelaire)

Desidero ringraziare il Centro Italiano Ricerche Aerospaziali nella figura dell' Ing. Luigi Papparone per la collaborazione offertami ed in particolare l'amico ingegnere Dino Mele per avermi sostenuto in questi mesi così impegnativi. Esprimo inoltre la mia piú sincera gratitudine ai tesisti che mi hanno preceduto per l'eccellente lavoro svolto, punto di riferimento per questa tesi.

Indice

Simboli ed acronimi	iii
Introduzione	1
I IL MODELLO MATEMATICO	I-1
I.1 Equazioni del bilancio	I-1
I.2 Equazioni di Eulero	I-5
I.3 Condizioni al contorno	I-6
I.3.1 Pareti solide	I-7
I.3.2 Contorni artificiali e problema della chiusura	I-8
I.4 Equazioni mediate di Navier-Stokes	I-10
I.4.1 La media di Favre	I-10
I.4.2 Equazioni di continuità e della quantità di moto	I-11
I.4.3 Equazione dell'energia	I-12
I.5 Generalità sui modelli di turbolenza	I-13
I.6 I modelli di turbolenza utilizzati	I-22
I.6.1 Il modello di Spalart-Allmaras	I-22
I.6.2 Il modello $k-\omega$ SST	I-27
I.7 Equazioni adimensionali	I-32
I.8 Il calcolo dei coefficienti aerodinamici	I-34
II IL CODICE FLOSIM	II-1
II.1 Discretizzazione del dominio di calcolo	II-1
II.1.1 Requisiti geometrici e topologici	II-7
II.2 Discretizzazione del modello matematico	II-12
II.2.1 Flussi convettivi non viscosi	II-15
II.2.2 Flussi convettivi viscosi	II-20
II.3 Condizioni al contorno	II-22
II.3.1 Scelta delle condizioni al contorno	II-23
II.4 Condizioni al contorno globali	II-25
II.4.1 Flussi viscosi artificiali sul contorno esterno del dominio di calcolo	II-25
II.4.2 Costruzione dei flussi numerici viscosi sulle frontiere interne	II-26

II.5	Condizioni al contorno locali	II-29
II.5.1	Condizioni di parete solida	II-30
II.5.2	Condizioni di <i>far-field</i>	II-33
II.5.3	Condizione di <i>outflow</i> subsonico con pressione imposta	II-36
II.5.4	Contorno di tipo periodico interno al dominio di calcolo	II-37
II.6	Integrazione nel tempo	II-38
II.7	Tecniche di accelerazione della convergenza	II-41
II.7.1	<i>Local Time Stepping</i>	II-41
II.7.2	<i>Residual averaging</i>	II-43
II.7.3	<i>Multigrid</i>	II-44
II.8	Aspetti numerici dei modelli di turbolenza	II-48
III LE POLARI DEL NACA 0012		III-1
III.1	Le griglie utilizzate	III-1
III.2	Gli altri parametri del calcolo	III-10
III.3	I dati sperimentali	III-16
III.4	I risultati numerici	III-20
III.4.1	Le curve di portanza	III-21
III.4.2	La convergenza	III-31
III.4.3	I grafici del C_f e del C_p	III-36
III.4.4	L'entropia	III-42
III.4.5	Le polari ed il C_m	III-45
III.4.6	La verifica dell' y^+	III-49
III.4.7	Alcune immagini	III-51
III.4.8	Il confronto tra Spalart-Allmaras e $k-\omega$ SST	III-55
III.4.9	Il confronto con FLUENT	III-61
III.4.10	L'effetto della griglia adattata	III-71
IV IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM		IV-1
IV.1	Presentazione del test-case	IV-1
IV.2	La convalida dello schema multiblocco	IV-7
IV.3	Le prove numeriche	IV-10
IV.4	Il profilo tricomponente BDM	IV-20
Conclusioni e prospettive		1
Bibliografia		i

Simboli ed acronimi

Di seguito viene riportata una lista di simboli ed acronimi tra i più importanti utilizzati in questo lavoro.

ASM	Algebraic Stress Model
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	numero di Courant (Courant-Friedrichs-Lewy)
CIR	schema numerico di Courant-Isaacson-Rees
CIRA	Centro Italiano Ricerche Aerospaziali
DPA	Dipartimento di Progettazione Aeronautica
EASM	Explicit Algebraic Stress Model
JST	schema numerico di Jameson-Swanson-Turkel
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NLR	Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium
NS	Navier-Stokes
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
RK	Runge-Kutta
SST	Shear Stress Transport

α	angolo d'attacco
C_d	coefficiente di resistenza
C_f	coefficiente d'attrito
C_l	coefficiente di portanza
C_m	coefficiente di momento
C_p	coefficiente di pressione
c_p	calore specifico a pressione costante
c_v	calore specifico a volume costante
D	resistenza
δ_{ij}	simbolo di Kronecker
$\partial\Omega$	frontiera del volume di controllo
E	energia totale per unità di massa
e	energia interna
\bar{f}	media classica di f
\tilde{f}	media di Favre di f
f'	fluttuazione classica
f''	fluttuazione di Favre
H	entalpia totale
h	entalpia per unità di massa
∞	simbolo di infinito (asintotico)
L	portanza
M	numero di Mach
\underline{M}	momento della forza aerodinamica
μ	viscosità
∇	operatore nabla
Ω	volume di controllo
$\bar{\Omega}$	vorticità
Pr	numero di Prandtl
R	costante dei gas
Re	numero di Reynolds
ρ	densità
$\underline{\underline{S}}$	tensore di deformazione
s	entropia
$\underline{\underline{\sigma}}$	tensore degli sforzi
T	temperatura
$\underline{\underline{\tau}}^R$	tensore degli sforzi di Reynolds
$\underline{\underline{\tau}}$	parte dissipativa del tensore degli sforzi
u,v	componenti del vettore velocità \underline{V}
W	vettore delle variabili conservative

Introduzione

Lo studio delle condizioni di alta portanza, e più in generale di flussi con ampie zone separate, è fondamentale per una buona progettazione aerodinamica e trova applicazione in diversi campi dell'ingegneria. Su scala industriale, nel settore aeronautico è indispensabile per l'ottimizzazione dell'efficienza dei sistemi di ipersostentazione dei velivoli (basta pensare alle fasi di decollo e di atterraggio in cui bisogna minimizzare la distanza da percorrere sulla pista, massimizzare il carico utile da poter imbarcare e rispettare i vincoli di sicurezza imposti dai regolamenti); inoltre nei prossimi anni ci si aspetta un significativo miglioramento nell'aerodinamica dei veicoli industriali. Importanti applicazioni specialistiche sono rivolte a migliorare le prestazioni di autovetture ed imbarcazioni (soprattutto sportive) intervenendo nel design degli alettoni (ad esempio in Formula 1), delle vele, delle pinne di deriva e dei timoni (come nel caso dell'America's Cup e delle regate transoceaniche).

L'impiego della fluidodinamica computazionale in aerodinamica applicata, grazie al continuo miglioramento delle potenze di calcolo, si propone come ausilio alla progettazione ma la non ancora completa affidabilità delle soluzioni rende necessario un impegnativo lavoro di ricerca per approfondirne le conoscenze e le potenzialità.

Questa tesi è rivolta al verificare le possibilità di impiegare metodi numerici per l'alta portanza.

La complessità fisica delle condizioni di alta portanza è dovuta alla presenza di ampie zone di flussi turbolenti e separati, la cui natura non è del tutto nota, che rendono difficile l'analisi numerica. Questa difficoltà è confermata dalle non numerose pubblicazioni (se confrontate con quelle relative ad altre condizioni, ad esempio il transonico) e dai limiti che tutte mostrano nella qualità dei risultati ad incidenze prossime allo stallo.

Prima di dare avvio alle simulazioni, che sono parte importante di questa tesi, ci si chiedeva addirittura se fosse possibile poter stimare lo stallo di un profilo alare mediante la soluzione delle equazioni del moto. Solo in seguito si è potuto dare spazio ad altre domande circa gli effetti di alcuni parametri sulla qualità dei risultati, su come intervenire per migliorare le prestazioni e sulla possibilità di elaborare casi ancora più complessi come quelli relativi alle geometrie multicomponente.

Due sono stati gli strumenti di calcolo utilizzati: il codice no-profit FLOSIM (in sviluppo al Dipartimento di Progettazione Aeronautica) come metodo di base e, per confronto e convalida, il codice commerciale FLUENT (probabilmente il più diffuso a livello internazionale).

Si è infatti reso necessario un confronto per comprendere la reale qualità di FLOSIM, che permette ad un utente esperto di intervenire attivamente in qualsiasi punto del programma (open-source), rispetto a FLUENT che all'utente offre solo un'interfaccia semplificata per garantire un'ampia accessibilità

(black-box) ed i cui risultati sono spesso oggetto di critiche.

In particolare FLOSIM è un solutore Eulero/Navier-Stokes 2D comprimibile localmente strutturato che prevede un'ampia possibilità di scelta tra i più moderni modelli di turbolenza. I risultati ottenuti sono stati ritenuti soddisfacenti perchè in linea con quelli presenti nelle più recenti pubblicazioni e con i risultati di FLUENT ed hanno ripagato chi scrive per gli sforzi sostenuti per svolgere un lavoro che è stato molto impegnativo.

In particolare il risultato che sembra più significativo è stato l'acquisizione di competenze su come pilotare un metodo numerico (come FLOSIM o FLUENT) verso la plausibile soluzione di un problema di alta portanza anche per geometrie multilappate.

Circa la struttura di questa tesi, i primi due capitoli sono stati dedicati ad una breve illustrazione delle equazioni mediate di Navier-Stokes, dei modelli di turbolenza utilizzati e delle più importanti caratteristiche del codice FLOSIM. Nel terzo capitolo, dopo una introduzione ai parametri del calcolo ed ai dati sperimentali scelti come riferimento, viene riportata l'elaborazione della polare del profilo NACA 0012, con numerosi confronti incrociati ed analisi dei diversi risultati.

Il quarto capitolo riguarda principalmente le simulazioni svolte intorno al profilo NLR 7301 con flap per il quale, oltre la disponibilità di un report ricco di dettagli relativi alle prove in galleria, sono disponibili anche alcuni risultati ottenuti con il codice ENSOLV al Centro Italiano Ricerche Aerospaziali, ed inoltre si mostra e si discute una soluzione per il profilo tricomponente BDM

evidenziando come modelli di turbolenza più avanzati possano essere necessari per geometrie reali.

Capitolo I

IL MODELLO MATEMATICO

I.1 Equazioni del bilancio

Dato un sistema termodinamico a due gradi intensivi di libertà, il suo comportamento fluidodinamico viene in generale descritto attraverso un sistema di leggi di bilancio:

- conservazione della massa,
- bilancio della quantità di moto,
- bilancio dell'energia totale.

Si consideri sottintesa fin da ora l'ipotesi di moto bidimensionale e si pensi alle variabili dipendenti fondamentali del flusso come a delle componenti di un vettore \mathbf{W} . In coordinate cartesiane esso si definisce come

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T \quad (\text{I.1})$$

dove ρ è la densità, u e v sono le componenti del vettore velocità \underline{V} , e è l'energia interna ed $E = e + V^2/2$ l'energia totale per unità di massa. La funzione \mathbf{W} viene chiamata vettore delle *variabili conservative*.

I. IL MODELLO MATEMATICO

Si consideri un volume di controllo fisso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, di frontiera la linea chiusa $\partial\Omega$. Detto $\vec{\mathbf{F}}$ il flusso di \mathbf{W} ed $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ il versore normale a $\partial\Omega$, orientato positivamente nel verso uscente da Ω , per le variabili conservative si può scrivere il seguente sistema di leggi di conservazione in forma integrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{I.2})$$

ottenuto trascurando le forze di massa e gli effetti termici radiativi. Nelle regioni in cui \mathbf{W} è una funzione continua, si passa dalla (I.2), per il teorema della divergenza, alla formulazione differenziale equivalente:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Se con

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{I.4})$$

si indica il tensore degli sforzi, essendo $\underline{\underline{\tau}}$ la parte dissipativa di $\underline{\underline{\sigma}}$, p la pressione termodinamica ed $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ il tensore unitario, la (I.3) si scrive in forma estesa come

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{\underline{\mathbf{V}}} \\ \rho E \end{bmatrix} + \vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} (\rho \underline{\underline{\mathbf{V}}})^T \\ \rho \underline{\underline{\mathbf{V}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} + p \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\tau}} \\ (\rho H \underline{\underline{\mathbf{V}}} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} + \underline{\underline{q}})^T \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.5})$$

con $H = E + p/\rho = h_0$ l'entalpia totale per unità di massa o entalpia di ristagno e $\underline{\underline{q}}$ il vettore flusso termico diffusivo.

Il modello scelto per la descrizione termodinamica del sistema a composizione costante sarà d'ora in avanti quello di gas [*caloricamente perfetto*]. Siano R , i calori specifici c_p e c_v ed il rapporto $\gamma = c_p/c_v$ delle costanti del gas.¹ Il modello

¹Per l'aria $R = 287.1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e $\gamma = 1.4$

I.1 Equazioni del bilancio

termodinamico si identifica con la coppia di equazioni di stato

$$p = \rho R T \quad , \quad h = c_p T \quad (\text{I.6})$$

dove $T = e/c_v = (E - V^2/2)/c_v$ è la temperatura (in Kelvin) ed $h = e + p/\rho$ l'entalpia per unità di massa. La *relazione di Meyer*, $R = c_p - c_v$, permette poi di esprimere qualsiasi variabile termodinamica in funzione delle altre. Ad esempio per l'entalpia si ha

$$h = \gamma e = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

Assumendo per il fluido un comportamento newtoniano, il tensore degli sforzi dissipativi si esprime come

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left\{ \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla} \underline{\mathbf{V}} + (\underline{\nabla} \underline{\mathbf{V}})^T \right] \right\} + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{V}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (\text{I.7})$$

dove μ e λ sono, rispettivamente, il primo ed il secondo coefficiente di viscosità e sono funzioni di stato. Risulta consistente con il modello di gas scelto assumere che essi siano funzione della sola temperatura. Il Secondo Principio della Termodinamica impone la condizione: $3\lambda + 2\mu \geq 0$ (con $\mu \geq 0$). Nelle applicazioni viene in genere accettata la validità della *relazione di Stokes*: $3\lambda + 2\mu = 0$. Inoltre il primo coefficiente di viscosità viene valutato in base alla legge di Sutherland

$$\mu = \mu_r \frac{1 + 0.4}{(T/T_r) + 0.4} \left(\frac{T}{T_r} \right)^{3/2}$$

con T_r e μ_r valori di riferimento. ²

²Per l'aria in condizioni *standard* $T_r = 288 \text{ K}$, $\mu_r = 1.789 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

I. IL MODELLO MATEMATICO

In coordinate cartesiane, usando in maniera intercambiabile le notazioni (x, y) ed (x_1, x_2) , si ottiene quindi

$$\tau_{x_i x_j} = \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\sum_k \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (\text{I.8})$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker ed $i, j, k = 1, 2$.

Per la descrizione dello scambio di energia nel modo calore, che avviene tra una generica particella macroscopica e l'ambiente circostante, si assume valida la legge di Fourier. Ciò è coerente con l'ipotesi di fluido newtoniano. Il flusso termico diffusivo si esprime dunque come

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla} T = -\frac{\mu \gamma}{\text{Pr}} \underline{\nabla} e = -\frac{\mu}{\text{Pr}} \underline{\nabla} h \quad (\text{I.9})$$

dove k è il coefficiente di conducibilità termica, funzione di stato, e $\text{Pr} = c_p \mu / k$ il numero di Prandtl, praticamente costante per l'aria per temperature al di sotto dei 1000°K.³

Le (I.5) sono oramai indicate nella letteratura scientifica con il nome di *Equazioni di Navier-Stokes*. Esse valgono in generale per flussi comprimibili e viscosi.

L'ipertensore flusso $\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{W})$ che compare nelle formule compatte (I.2)-(I.3) si esprime come un vettore dello spazio (x, y) avente per componenti delle funzioni a valori in \mathbb{R}^4 . In coordinate cartesiane si scrive

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \vec{i} + \mathbf{G} \vec{j} \quad (\text{I.10})$$

³Per l'aria in condizioni *standard* è $\text{Pr} = 0.72$

Inoltre, esso viene scomposto come

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_E - \vec{\mathbf{F}}_V = \begin{bmatrix} (\rho \underline{\mathbf{V}})^T \\ \rho \underline{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{V}} + p \underline{\mathbf{I}} \\ (\rho H \underline{\mathbf{V}})^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\boldsymbol{\tau}} \\ (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{V}} - q)^T \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

cioè in un contributo *euleriano* (E) ed di un contributo *viscoso* (V).

In coordinate cartesiane si ha

$$\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_E - \mathbf{F}_V) \vec{i} + (\mathbf{G}_E - \mathbf{G}_V) \vec{j} \quad (\text{I.12})$$

con

$$\mathbf{F}_E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_E = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix} \quad (\text{I.13})$$

$$\mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx} u + \tau_{xy} v - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx} u + \tau_{yy} v - q_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

I.2 Equazioni di Eulero

La maggioranza delle simulazioni di interesse aerospaziale è orientata verso flussi ad alto numero di Reynolds, cioè flussi dominati da fenomeni convettivi.

Se le equazioni (I.3) vengono scritte esplicitando l'operatore di divergenza in coordinate cartesiane, si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_E}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_E}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_V}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_V}{\partial y} \quad (\text{I.15})$$

Ponendo uguale a zero il secondo membro si ottengono le *equazioni di Eulero* che modellano lo stesso fenomeno fluidodinamico ma ad un livello di approssimazione più forte. Nel bilancio (I.15) i termini viscosi e conduttivi rappresentano dei termini di dissipazione che nel modello euleriano o “non viscoso” vengono considerati nulli. Dal punto di vista matematico queste equazioni possono essere viste come un caso limite delle equazioni di Navier-Stokes al tendere a zero di tutti gli effetti diffusivi ($\mu \rightarrow 0$ e $k \rightarrow 0$). Quindi le equazioni di Eulero sono ottenute semplicemente ponendo $\vec{\mathbf{F}}_V = 0$.

Eliminando per comodità di scrittura il pedice $(\cdot)_E$, per il caso non viscoso si può adottare un’equazione analoga alla (I.3):

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad (\text{I.16})$$

Questa formulazione differenziale viene detta *conservativa* poiché deriva direttamente dalle leggi di conservazione in forma integrale. Le “componenti” \mathbf{F} e \mathbf{G} del flusso euleriano $\vec{\mathbf{F}}$ sono date dalle (I.13).

I.3 Condizioni al contorno

Nelle applicazioni, le equazioni di Navier-Stokes devono essere risolte in un dominio limitato Ω , sottoinsieme dello spazio d -dimensionale \mathbb{R}^d (in questo caso $d = 2$). La frontiera $\partial\Omega$ del dominio di calcolo può essere suddivisa in una parte non materiale Σ , scelta in maniera pressoché arbitraria, ed in una parte materiale Σ_w che corrisponde al contorno di una o più pareti solide.

Se si considera, per esempio, l’equazione differenziale (I.3), la soluzione $\mathbf{W}(\vec{x}, t)$ è completamente determinata in Ω se si assegnano i valori $\mathbf{W}(\vec{x}, 0)$ ad un istante

I.3 Condizioni al contorno

iniziale e se sulla frontiera $\partial\Omega$ vengono assegnate, nel tempo, delle opportune condizioni al contorno (*Time Dependent Boundary Conditions*). Si tratta di un *Problema di Valori Iniziali e di Valori al Contorno* (IBVP, *Initial Boundary Value Problem*).

I.3.1 Pareti solide

Sul contorno Σ_w vengono imposte usualmente delle condizioni che discendono da considerazioni di carattere fisico. Nel campo di validità dell'ipotesi del *continuum*, in corrispondenza di una parete solida impermeabile per un flusso viscoso si impone per la velocità la cosiddetta condizione di *no-slip*

$$\vec{V} \cdot \vec{t} = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{x} \in \Sigma_w, t \geq 0 \quad (\text{I.17})$$

dove \vec{t} ed \vec{n} sono, rispettivamente, i versori tangente e normale a $\partial\Omega$. Nel caso di parete permeabile, attraverso la quale viene aspirato ($\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$) o iniettato ($\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$) del fluido, la condizione precedente si modifica in

$$\vec{V} \cdot \vec{t} = 0, \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = v_w(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \Sigma_w, t \geq 0 \quad (\text{I.18})$$

con v_w una funzione assegnata opportunamente lungo Σ_w e generalmente dipendente dal tempo.

Per la temperatura sono generalmente utilizzati due tipi di condizioni al contorno:

- la temperatura di parete viene assegnata,

$$T(\vec{x}, t) = T_w(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \Sigma_w, t \geq 0 \quad (\text{I.19})$$

attraverso la legge $T_w(\vec{x}, t)$ che in particolare può essere fissa nel tempo;

- si impone che il gradiente di temperatura nel senso normale alla parete sia nullo,

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T = 0 \quad \vec{x} \in \Sigma_w, t \geq 0 \quad (\text{I.20})$$

che corrisponde ad una condizione di parete adiabatica.

Se la parete è porosa, anche le condizioni al contorno per la T vanno opportunamente adeguate. Nel caso di iniezione dall'esterno di materia fluida ad una temperatura T_{ex} alcuni autori [7] parlano di “traspirazione”. Per questi problemi la temperatura alla parete viene usualmente ricavata dalla condizione di equilibrio termico

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_w = \rho_w v_w c_p \begin{cases} (T_w - T_{ex}) & \text{se } T_w > T_{ex} \\ (T_{ex} - T_w) & \text{se } T_w < T_{ex} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

con ρ_w e k_w , rispettivamente, la densità ed il coefficiente di conducibilità termica alla parete. In un'altra classe di problemi in cui la parete porosa risulta una schematizzazione accettabile della superficie di un combustibile solido esposta al contatto con un ossidante gassoso [6] è più opportuno assegnare alla temperatura della parete il valore della temperatura di fiamma.

I.3.2 Contorni artificiali e problema della chiusura

Le condizioni illustrate sopra sono ormai consolidate nella pratica delle applicazioni delle equazioni di Navier-Stokes. Esse però si riferiscono solo ad una parte della frontiera del dominio di calcolo. Una scelta corretta delle condizioni al contorno lungo la parte non materiale Σ di $\partial\Omega$ richiede invece una maggiore cautela e non può basarsi solamente sulla interpretazione fisica del problema.

I.3 Condizioni al contorno

Dal punto di vista della classificazione matematica, le equazioni di Navier-Stokes instazionarie e comprimibili sono non più iperboliche come le equazioni di Eulero, ma *non completamente paraboliche* [28]. Nel caso di alti numeri di Reynolds, si possono vedere come una (*non completa*) *perturbazione ellittica* di un sistema iperbolico [7]. Questo carattere matematico è tale che, per un generico insieme di condizioni iniziali ed al contorno, non esiste alcun teorema di esistenza globale, cioè di esistenza di una soluzione unica in un arbitrario intervallo di tempo [11]. I risultati delle investigazioni teoriche sull'argomento sono insoddisfacenti (cfr. ad esempio i teoremi di esistenza locale di Solonnikov e Kazhikhov [26]). Dunque non esistono regole pratiche generali per la definizione di condizioni al contorno opportune per quei punti $\vec{x} \in \Sigma \subset \partial\Omega$.

Per un'impostazione moderna del problema teorico della chiusura delle equazioni di Navier-Stokes e di Eulero si rimanda a Grasso e Meola [10], De Marco [6] ed ai riferimenti ivi riportati. I risultati teorici disponibili sulla chiusura

Tipo di condizione al contorno	Condizioni del flusso	Eulero	Navier-Stokes
parete	<i>no-slip</i>	1	$1+d$
parete	<i>slip</i>	1	$1+d$
<i>inflow</i>	subsoniche	$1+d$	$2+d$
$(\vec{V} \cdot \vec{n} < 0)$	supersoniche	$2+d$	$2+d$
<i>outflow</i>	subsoniche	1	$1+d$
$(\vec{V} \cdot \vec{n} > 0)$	supersoniche	0	$1+d$

Tabella I.1: Numero di condizioni al contorno richieste per le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes in uno spazio d -dimensionale.

delle equazioni di Navier-Stokes sono ancora parziali mentre per le equazioni di Eulero lo stato di conoscenza teorica è più avanzato. Un'indicazione,

generalmente accettata, sul numero di condizioni al contorno richieste per la chiusura delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes è contenuta nella tabella I.1. In particolare, per le equazioni di Navier-Stokes sono riportati i risultati, divenuti oggi di riferimento, dello studio teorico di Strikwerda [28].

I.4 Equazioni mediate di Navier-Stokes

Nello studio di flussi turbolenti in regime comprimibile, in problemi di interesse industriale e di *design*, l'approccio più comune rimane quello della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes mediate. L'operazione di media in questo caso non è quella temporale classica ma una media pesata sulla densità o *media di Favre* [8]. Una discussione introduttiva e ricca di riferimenti sulla scrittura delle RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) e sui modelli di turbolenza in regime comprimibile è data, ad esempio, da Hirsch [11] e da Vandromme [32].

I.4.1 La media di Favre

Data una generica grandezza f , la media classica \bar{f} è data dalla

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}, t + \tau) d\tau \quad (\text{I.22})$$

dove T è un tempo sufficientemente più grande del tempo caratteristico delle fluttuazioni turbolente. La fluttuazione $f' = f - \bar{f}$ della grandezza considerata rispetto al suo valor medio è tale che $\overline{f'} = 0$.

La media di Favre di f si indica con \tilde{f} ed è data dalla

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (\text{I.23})$$

In tal caso la fluttuazione $f'' = f - \tilde{f}$ rispetto al valore mediato sulla densità non ha un valor medio nullo, $\overline{f''} \neq 0$. Inoltre, è facile ricavare le identità $\overline{\rho f''} = 0$, $\overline{\tilde{f}} = \tilde{f}$.

I.4.2 Equazioni di continuità e della quantità di moto

Se, tra le due possibili scomposizioni

$$f = \bar{f} + f' = \tilde{f} + f'' \quad (\text{I.24})$$

si utilizza quella di Favre per le componenti del vettore velocità e quella classica per tutte le altre grandezze che compaiono nelle equazioni della continuità e della quantità di moto, si ottiene

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{\underline{V}}) = 0 \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{\underline{V}}) + \underline{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{\underline{V}} \tilde{\underline{V}} + \bar{p} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\tau}}^v - \underline{\underline{\tau}}^R) = 0 \quad (\text{I.26})$$

La prima equazione è formalmente identica all'equazione di continuità non mediata. Nella seconda equazione compare il tensore mediato nel tempo degli sforzi viscosi

$$\underline{\underline{\tau}}^v = \underline{\underline{\tau}} = -\bar{p} \underline{\underline{I}} + \mu \underline{\underline{S}} \approx -\bar{p} \underline{\underline{I}} + \mu \tilde{\underline{\underline{S}}} \quad (\text{I.27})$$

con $\underline{\underline{S}}$ il tensore di deformazione, di componenti cartesiane

$$S_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial V_k}{\partial x_k}$$

e μ una funzione di $\bar{\rho}$, $\tilde{\underline{V}}$ ed \tilde{E} . Infine, nella (I.26) compare la correlazione

$$\underline{\underline{\tau}}^R = -\overline{\rho \underline{\underline{V}}'' \underline{\underline{V}}''} \quad (\text{I.28})$$

Il tensore $\underline{\underline{\tau}}^R$ è chiamato tensore degli *sforzi di Reynolds* ed ha componenti cartesiane $-\overline{\rho V_i'' V_j''}$.

I.4.3 Equazione dell'energia

Dall'espressione della media alla Favre dell'energia totale $E = e + V^2/2$,

$$\tilde{E} = \frac{\overline{\rho(e + \underline{V} \cdot \underline{V}/2)}}{\bar{\rho}} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \overline{\underline{V} \cdot \underline{V}}$$

e dalle proprietà dell'operatore di media si ottiene l'espressione:

$$\frac{1}{2} \overline{\underline{V} \cdot \underline{V}} = \frac{1}{2} \tilde{\underline{V}} \cdot \tilde{\underline{V}} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \underline{V}'' \cdot \underline{V}''}}{\bar{\rho}}$$

Definendo una energia cinetica per unità di massa \tilde{k} del flusso medio

$$\tilde{k} \equiv \frac{1}{2} \tilde{\underline{V}} \cdot \tilde{\underline{V}} \quad (\text{I.29})$$

ed una *energia cinetica turbolenta* k , come media di Favre dell'energia cinetica delle fluttuazioni,

$$k \equiv \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \underline{V}'' \cdot \underline{V}''}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \overline{\underline{V}'' \cdot \underline{V}''} \equiv \tilde{k}'' \quad (\text{I.30})$$

si scrive

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \tilde{k} + k \equiv \hat{E} + k \quad (\text{I.31})$$

con $\hat{E} = \tilde{e} + \tilde{k}$ l'*energia totale del flusso medio*. Analogamente, per l'entalpia totale si ha

$$\tilde{H} = \tilde{E} + \bar{p}/\bar{\rho} = \tilde{h} + \tilde{k} + k \equiv \hat{H} + k \quad (\text{I.32})$$

Infine le fluttuazioni turbolente di queste grandezze termiche vengono espresse come [11]

$$E'' = e'' + \tilde{\underline{V}} \cdot \underline{V}'' + k'' - k \quad (\text{I.33})$$

$$H'' = h'' + \tilde{\underline{V}} \cdot \underline{V}'' + k'' - k \quad (\text{I.34})$$

I.5 Generalità sui modelli di turbolenza

Una forma conservativa mediata dell'equazione dell'energia è

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \underline{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{\underline{V}}) = \underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{\bar{q}} + \overline{\underline{V} \cdot \underline{\tau}} - \overline{\rho H'' \underline{V}''} \right) \quad (\text{I.35})$$

e si vede come l'infuenza delle fluttuazioni turbolente sul bilancio dell'energia totale sia riconducibile, in media, al vettore *flusso termico turbolento* $\overline{\rho H'' \underline{V}''}$.

L'ultima equazione può essere scritta come equazione di evoluzione dell'energia totale del flusso medio [4], nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{E}) + \underline{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \hat{H} \tilde{\underline{V}}) = \underline{\nabla} \cdot \left(-\underline{\bar{q}} + \tilde{\underline{V}} \cdot \underline{\tau}^{\text{Tot}} - \overline{\rho h'' \underline{V}''} \right) \quad (\text{I.36})$$

dove

$$\underline{\tau}^{\text{Tot}} = \underline{\tau}^v + \underline{\tau}^R \quad (\text{I.37})$$

Analogamente, si definisce un vettore flusso termico totale $\underline{q}^{\text{Tot}}$ come:

$$\underline{q}^{\text{Tot}} = \underline{\bar{q}} + \overline{\rho h'' \underline{V}''} \quad (\text{I.38})$$

I.5 Generalità sui modelli di turbolenza

L'operazione di media con la quale si sono ottenute le equazioni (I.25)-(I.26)-(I.36) ha introdotto una forte semplificazione nelle equazioni di Navier-Stokes con la conseguente perdita di numerose informazioni in esse contenute. Il voler considerare solo i loro valori medi permette di ridurre il numero delle incognite con la possibilità di utilizzare un *set* di equazioni formalmente identico alle (I.5) di carattere più generale. Tale *set* di equazioni però, presenta come termini aggiuntivi delle correlazioni del tipo $\overline{f''g''}$, introdotti dall'operazione di media, e non può essere risolto senza disporre di informazioni addizionali sulle

nuove incognite.

Ipotesi di Morkovin: una importante assunzione che viene sempre fatta nel trattamento dei flussi turbolenti riguarda l'influenza delle fluttuazioni della densità sul modello di turbolenza. Secondo questa assunzione, nota come 'ipotesi di Morkovin', le fluttuazioni ρ' non influenzano significativamente la "struttura" delle fluttuazioni turbolente delle altre grandezze per numeri di Mach locali non troppo elevati. Per strati limite e scie questa ipotesi vale per $M < 5$; per i getti la limitazione è $M < 1.5$. Questo significa che i modelli di turbolenza basati su dati empirici forniti da esperimenti su flussi incomprimibili sono ugualmente utilizzabili per le quantità mediate che compaiono nelle RANS scritte per flussi comprimibili, in assenza di "effetti delle alte temperature".

E' dunque necessario introdurre delle relazioni addizionali che permettano di legare le nuove incognite $\underline{\underline{\tau}}^R$ e $\overline{\rho h'' \underline{V}''}$ alle variabili dipendenti mediate.

In campo incomprimibile (in cui si utilizza la sola media classica) una relazione interessante è rappresentata dal trasporto dell'energia cinetica turbolenta delle fluttuazioni definita da

$$K_T = \frac{1}{2}(\overline{u'u'} + \overline{v'v'}) = \frac{1}{2}\overline{V'_i V'_i} \quad (\text{I.39})$$

Il bilancio di K_T è

$$\begin{aligned} \frac{DK_T}{Dt} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{V'_i \left(1/2 V'_j V'_j + \frac{p'}{\rho} \right)} \right] - \overline{V'_i V'_j} \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu V'_j \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \nu \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

I termini a secondo membro rappresentano rispettivamente la diffusione convettiva, la produzione, la diffusione viscosa ed infine la dissipazione viscosa turbolenta.

Purtroppo in tale relazione compaiono altri termini in più, come le correlazioni pressione - velocità, (del tipo $\overline{p'V'_i}$) che non permettono di “chiudere” il problema.

Il procedimento più naturale che potrebbe portare a bilanciare il numero di incognite col numero di equazioni sembrerebbe quello di esprimere un'equazione di trasporto per lo stesso tensore di Reynolds, o meglio per ogni componente dello *stress* di Reynolds.

Si ottengono così le “equazioni dello *stress* di Reynolds”. Per la componente $\overline{V'_i V'_j}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{V'_i V'_j}}{Dt} = & - \left[\overline{V'_j V'_k} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_k} + \overline{V'_i V'_k} \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_k} \right] - 2\nu \frac{\partial V'_i}{\partial x_k} \frac{\partial V'_j}{\partial x_k} + \\ & \overline{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{V'_i V'_j V'_k} - \nu \frac{\partial \overline{V'_i V'_j}}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{jk} V'_i + \delta_{ik} V'_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

Anche in questa relazione compaiono termini in più quali le correlazioni del III ordine della velocità (del tipo $\overline{V'_i V'_j V'_k}$). Evidentemente ciò comporta che l'accoppiamento delle (I.40)-(I.41) alle RANS non rappresenta un sistema di equazioni “chiuso”. Volendo continuare nel procedimento, si potrebbe scrivere

I. IL MODELLO MATEMATICO

il bilancio del termine $\overline{V'_i V'_j V'_k}$ ma comparirebbero termini di correlazione del IV ordine di velocità e del III ordine di pressione - velocità.

E' questo il ben noto **problema della chiusura** delle equazioni della turbolenza, che rappresenta la difficoltà principale nello studio del fenomeno mediante le equazioni mediate di Navier - Stokes (RANS).

In definitiva il problema viene affrontato effettuando delle approssimazioni. Al di là delle approssimazioni dovute al campo di moto (2D, 3D, strato limite etc...) ed alla tipologia di flusso (comprimibile, incomprimibile, subsonico etc...), in pratica si accoppiano alle (I.25)-(I.26)-(I.36) una o più relazioni (che siano o meno equazioni differenziali o algebriche) modellate su basi teoriche ma che si avvalgono di informazioni di carattere empirico e che approssimino in qualche modo le nuove incognite.

I cosiddetti “*Eddy viscosity models*” sono dei procedimenti di chiusura delle RANS in cui si segue la classica *assunzione di Boussinesq*, che lega gli sforzi di Reynolds alle velocità medie in forma analoga ai corrispondenti sforzi viscosi medi, introducendo una *viscosità turbolenta* μ_T , detta anche *eddy viscosity*, tale che

$$\tau_{ij}^R = -\overline{\rho V_i'' V_j''} = \mu_T \left[\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (\text{I.42})$$

L'ultimo termine nella (I.42) deve essere introdotto per consistenza poiché la traccia del tensore degli sforzi di Reynolds

$$\sum_i \tau_{ii}^R = \sum_i -\overline{\rho V_i'' V_i''} = -2 \bar{\rho} k$$

deve essere pari al doppio dell'energia cinetica turbolenta.

I.5 Generalità sui modelli di turbolenza

Analogamente viene modellato il flusso termico turbolento definendo un coefficiente di *conducibilità termica turbolenta* k_T tale che

$$\overline{\rho h'' \underline{\nabla}''} = -k_T \underline{\nabla} \overline{T} = -\gamma \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T} \underline{\nabla} \tilde{e} \quad (\text{I.43})$$

dove Pr_T è il *numero di Prandtl turbolento*⁴. In particolare vale tra k_T e μ_T la relazione $k_T = c_p \mu_T / \text{Pr}_T$.

Se si introducono queste espressioni nelle RANS si ottengono delle equazioni formalmente identiche a quelle di Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{\underline{V}} \\ \bar{\rho} \tilde{\underline{E}} \end{bmatrix} + \tilde{\underline{\nabla}} \cdot \begin{bmatrix} (\bar{\rho} \tilde{\underline{V}})^T \\ \bar{\rho} \tilde{\underline{V}} \tilde{\underline{V}} + \bar{\mathcal{P}} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\tau}}^{\text{Tot}} \\ (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{\underline{V}} - \tilde{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{\tau}}^{\text{Tot}} - \underline{\underline{q}}^{\text{Tot}})^T \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.44})$$

dove

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \quad (\text{I.45})$$

$$\tau_{ij}^{\text{Tot}} = \mu^{\text{Tot}} \left[\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\underline{\nabla} \cdot \tilde{\underline{V}}) \delta_{ij} \right] \quad (\text{I.46})$$

$$\underline{\underline{q}}^{\text{Tot}} = -k^{\text{Tot}} \underline{\nabla} \overline{T} \quad (\text{I.47})$$

e con al posto di μ e di k rispettivamente

$$\mu^{\text{Tot}} = \mu + \mu_T \quad \text{e} \quad k^{\text{Tot}} = k + k_T$$

Inoltre l'ultimo termine della (I.42), contributo della energia cinetica turbolenta media al bilancio della quantità di moto, compare al fianco della pressione termodinamica (I.45).

Questo è l'approccio più semplice alle equazioni di Navier-Stokes per i flussi

⁴Per l'aria si può assumere un valore costante $\text{Pr}_T = 0.9$

I. IL MODELLO MATEMATICO

turbolenti ed, i vari modelli di turbolenza vengono in questo caso distinti a seconda del modo in cui tentano di stimare i ‘coefficienti turbolenti’ appena introdotti.

Il principio è dunque quello di risolvere delle relazioni (equazioni algebriche o differenziali) che “modellino” ovvero calcolino lo *stress* di Reynolds, per poi risolvere le RANS con lo *stress* di Reynolds noto in quanto precedentemente calcolato.

Già Prandtl nel 1925 pose le basi dei modelli di turbolenza con la sua *mixing-length theory* [22]. Prandtl, partendo dall’ipotesi di Boussinesq, propose che ogni fluttuazione turbolenta fosse proporzionale a una scala di lunghezza e a un gradiente di velocità come

$$\mu_T \propto \rho l V \tag{I.48}$$

dove l e V sono una lunghezza ed una velocità caratteristiche; in particolare l è chiamata ‘lunghezza di mescolamento’ e rappresenta un valore medio della dimensione degli *eddies*, che sono strutture turbolente, molto più grande del libero percorso medio.

Per completare questo modello occorre esprimere l in funzione di condizioni note del flusso. L’ipotesi di Prandtl della lunghezza di mescolamento è alla base di uno svariato numero di modelli di turbolenza che nella terminologia odierna si indicano come “modelli algebrici” o “modelli a zero equazioni”.

Data la quantità di modelli attualmente pubblicati si è resa necessaria una loro classificazione.

Occorre innanzitutto distinguere due categorie: modelli “completi” e modelli

“incompleti”. I primi definiscono la scala di lunghezza automaticamente, cioè non necessitano di alcuna relazione in più per definirla, mentre per i modelli incompleti occorre definire esplicitamente tale scala (come per la *mixing-length*). Si possono inoltre individuare due classi di modelli perchè oltre agli *Eddy viscosity models* esistono anche gli *Stress-transport models*. I primi, come detto, sfruttano l’ipotesi di Boussinesq calcolando l’*eddy viscosity* tramite la soluzione di apposite relazioni; i modelli di *stress-transport*, detti anche di chiusura al II ordine, calcolano invece lo *stress* di Reynolds risolvendo in modo approssimato le equazioni del tensore di Reynolds (tensore simmetrico).

I modelli *eddy viscosity* si possono ulteriormente suddividere in tre categorie, a seconda del numero di equazioni differenziali da risolvere: modelli algebrici (zero equazioni), modelli a una equazione e modelli a due equazioni. Nei modelli ad una equazione questa rappresenta spesso il trasporto dell’energia cinetica turbolenta. Anche nei modelli a due equazioni la prima rappresenta quasi sempre il trasporto dell’energia cinetica turbolenta, mentre la seconda equazione può rappresentare il trasporto di ε , dissipazione per unità di massa, oppure ω rateo di dissipazione specifica, dando luogo ai ben noti modelli $k - \varepsilon$ e $k - \omega$.

In ogni caso esiste una tale varietà di modelli, sia ad una che a due equazioni, che sarebbe impossibile elencarne le differenze. Una panoramica notevole la si può trovare in Wilcox [33].

Lo sviluppo di un tale numero di modelli di turbolenza evidenzia come si sia ancora lontani dall’aver risolto tutti i problemi della simulazione dei flussi turbo-

I. IL MODELLO MATEMATICO

lenti. Nonostante ciò l'impiego di tali modelli risulta certamente indispensabile ove si vogliano ottenere risultati nei campi di maggiore interesse ingegneristico. A tal proposito è importante conoscere l'ambito di applicabilità dei diversi tipi di modelli.

Nella simulazione di flussi di interesse aeronautico, i modelli *eddy viscosity* sono largamente impiegati, in quanto danno risultati in buon accordo con i dati sperimentali, soprattutto in condizioni di crociera e moderata separazione, e inoltre non hanno un costo computazionale troppo elevato.

Come riportato anche in recentissime pubblicazioni [14], i problemi sorgono allorchè si vogliano simulare flussi con forti separazioni e forti gradienti avversi di pressione, specie per geometrie tridimensionali. Nella figura I.1 si riporta l'andamento delle polari di un profilo multicomponente (riportato nella stessa figura) calcolate con diversi modelli. È evidente il discostamento crescente, al tendere dell' α all'angolo di stallo, dalla curva sperimentale.

In queste condizioni è fondamentale l'ipotesi di Boussinesq ad essere debole. Si è però cercato di andare oltre in qualche modo, considerando ad esempio l'ipotesi di Boussinesq come il primo termine di un'espansione in serie del tensore di Reynolds, con i cosiddetti modelli non lineari. Per tali modelli le equazioni di base sono pressochè le stesse ma il calcolo dell'*eddy viscosity* è fatto tramite una relazione più complessa, e appunto non lineare, di quella ipotizzata da Boussinesq.

Un'altra proposta di soluzione per i casi di flussi separati è rappresentata dai già citati modelli di chiusura al II ordine. Purtroppo si intuisce facilmente co-

I.5 Generalità sui modelli di turbolenza

me il grosso limite di questi modelli sia il loro costo computazionale. Un passo avanti in tal senso si è realizzato concependo i modelli ASM o EASM, in cui le relazioni necessarie per il calcolo delle componenti del tensore di Reynolds sono equazioni algebriche anzichè differenziali. Tali equazioni vanno comunque accoppiate alle equazioni di base dei modelli di turbolenza (tipicamente a due equazioni).

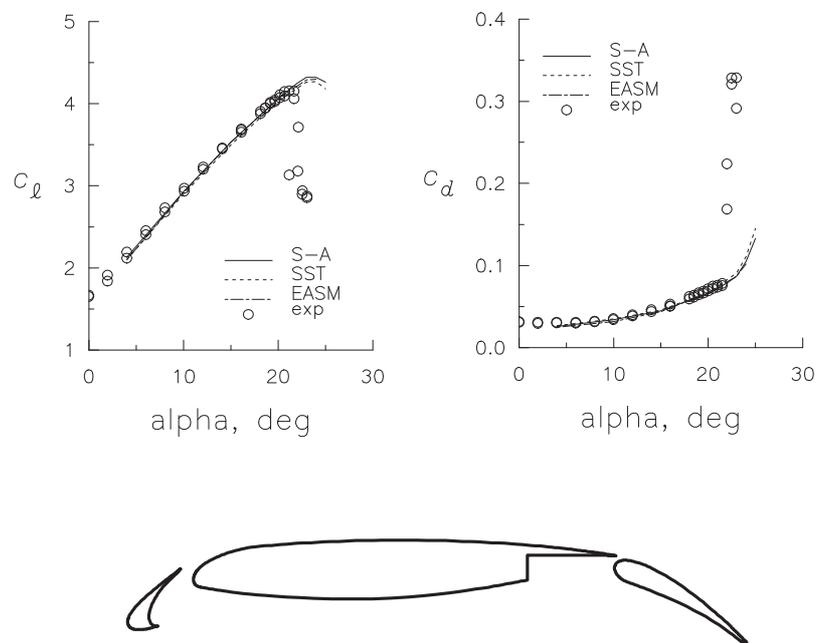


Figura I.1: Polari confrontate con i dati sperimentali [AIAA P. 97-2260]

I.6 I modelli di turbolenza utilizzati

Attualmente il codice FLOSIM (di cui si parlerà nel prossimo capitolo) offre una vasta scelta di modelli di turbolenza [3, 9] da utilizzare secondo le diverse esigenze ma in questo paragrafo si analizzeranno solo i due modelli utilizzati per questo lavoro e si farà riferimento alle equazioni scritte con notazione relativa al caso incomprimibile (che fa uso della media classica) che, attraverso semplici accorgimenti, vengono facilmente impiegate per il caso comprimibile.

I.6.1 Il modello di Spalart-Allmaras

Quello di Spalart-Allmaras [27] è stato un modello che ha riscosso “grande successo” negli ultimi anni. Il motivo di tale successo è dovuto alla sua semplicità e flessibilità, nonché al fatto che è stato “calibrato” specificamente per applicazioni di interesse aeronautico.

Il modello è del tipo *eddy viscosity* ad una equazione ed è un modello “completo” in quanto definisce automaticamente la scala di lunghezza della turbolenza. Diversamente dai modelli ad una equazione storicamente noti [23], nei quali l’equazione da risolvere per calcolare l’*eddy viscosity* esprimeva il trasporto dell’energia cinetica turbolenta, Spalart ha dedotto un’equazione di trasporto per l’*eddy viscosity* stessa (in realtà, come si vedrà tra breve, l’incognita non è proprio la μ_T).

Il modello ha quattro versioni “annidate” dalla più semplice, applicabile solo a *free shear flows*, fino alla più completa, applicabile a flussi viscosi intorno a corpi solidi con zone laminari. Salendo nella complessità del flusso vengo-

no introdotti e calibrati nuovi termini e coefficienti di chiusura che risultano “passivi” nelle versioni più semplici. Rimandando a [27] per i particolari circa la calibratura del modello, si riportano solo le linee guida del suo sviluppo in quanto rappresentano uno *standard* per quasi tutti i modelli *eddy viscosity* “completi”.

Per i coefficienti di chiusura che saranno introdotti il suffisso *b* sta per *basic*, *t* per *trip* (inizio transizione), *ν* per viscoso e infine *w* per *wall*. La grandezza centrale è ν_T , legata alla μ_T tramite la densità e che permette di esprimere, come detto, lo *stress* di Reynolds in funzione di grandezze note come

$$\underline{\underline{\tau}}^R = 2\mu_T \left(\overline{S}_{ij} - \frac{1}{3} \sum_k \frac{\partial \overline{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.49})$$

con

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i} \right)$$

Non essendoci alcuna equazione di trasporto esatta da approssimare per la ν_T si procede con un approccio empirico per scriverne il bilancio.

Il primo membro dell’equazione è ovviamente la derivata Lagrangiana di ν_T

$$\frac{D\rho\nu_T}{Dt} \equiv \frac{\partial\rho\nu_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\nu_T \overline{V}_j) \quad (\text{I.50})$$

A secondo membro ci dovrà essere un termine di produzione e uno di diffusione.

Il termine di produzione dovrà certamente contenere il tensore di deformazione \overline{S}_{ij} o la vorticità

$$\overline{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i} \right)$$

perchè quest’ultima risulta essere la candidata ideale per i flussi di interesse aeronautico in quanto la turbolenza è presente solo dove c’è vorticità (gene-

I. IL MODELLO MATEMATICO

rata dall'interazione del fluido con la parete). Il termine diffusivo è il classico termine $\nabla[(\nu_T/\sigma)\nabla\nu_T]$, in più viene aggiunto, in analogia con i modelli a due equazioni, un termine di *cross diffusion* (ad esempio $\nabla k \cdot \nabla \omega$). In definitiva una prima stesura del modello porterebbe ad una equazione di trasporto del tipo

$$\frac{\partial \rho \nu_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \nu_T \bar{V}_j) = c_{b1} |\bar{\Omega}| \nu_T + \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu_T \nabla \nu_T) + c_{b2} (\nabla \nu_T \cdot \nabla \nu_T)] \quad (\text{I.51})$$

I coefficienti c_{b1} , c_{b2} , σ vengono determinati in parte da valutazioni empiriche, in parte per analogia con modelli di turbolenza già testati [27]. La (I.51) è la versione più semplice del modello, valida per i *free shear flows*.

Procedendo nell'operazione di calibratura si analizza quindi la regione in prossimità di una parete, dapprima a numeri di Reynolds elevati e successivamente per valori finiti del numero di Reynolds. In questa fase si sfruttano i risultati ottenuti dallo studio dei profili di velocità turbolenti in prossimità di pareti, ricavando, come prevedibile, un altro termine di distruzione dipendente dalla distanza dalla parete

$$-c_{w1} f_w \left(\frac{\nu_T}{d} \right) \quad (\text{I.52})$$

e alcune modifiche ai termini di produzione.

In particolare analizzando il sottostrato viscoso si ricava un fattore che moltiplicato per l'incognita dell'equazione fornisce la ν_T

$$\nu_T = \hat{\nu} f_{\nu 1} \quad \text{con} \quad f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} \quad \chi = \frac{\hat{\nu}}{\nu} \quad (\text{I.53})$$

in tal modo l'incognita dell'equazione non è più la ν_T ma la $\hat{\nu}$. Il termine di produzione invece diventa

$$\hat{S} = |\bar{\Omega}| + \frac{\hat{\nu}}{k^2 d^2} f_{\nu 2} \quad (\text{I.54})$$

Si effettua poi un'analisi nella zona di transizione con l'aggiunta di altri termini e coefficienti di chiusura e si ottiene così l'equazione completa del modello con le relazioni ed i coefficienti di chiusura illustrate di seguito.

L'*eddy viscosity* è calcolata come

$$\nu_T = \hat{\nu} f_{\nu 1} \quad (\text{I.55})$$

L'equazione del trasporto di $\hat{\nu}$ è

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \hat{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \hat{\nu} \bar{V}_j) &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \hat{S} \hat{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \rho \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_j} \right] \\ &- \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{k^2} f_{t2} \right] \rho \left[\frac{\hat{\nu}}{d} \right]^2 + f_{t1} \rho \Delta U^2 \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

I termini a secondo membro rappresentano rispettivamente produzione, diffusione conservativa, diffusione non conservativa, distruzione sotto parete, incremento di produzione dovuto alla transizione e sorgente di turbolenza dovuta alla transizione.

Costanti "basiche" per i *free shear flows*:

$$c_{b1} = 0.1355 \quad c_{b2} = 0.622 \quad \sigma = 2/3 \quad k = 0.41 \quad (\text{I.57})$$

Costanti addizionali e le relazioni ausiliarie per i termini di distruzione nello strato limite turbolento:

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma} \quad r \equiv \frac{\hat{\nu}}{\hat{S} k^2 d^2}$$

I. IL MODELLO MATEMATICO

$$c_{w2} = 0.3 \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad (\text{I.58})$$

$$c_{w3} = 2 \quad f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}$$

I coefficienti e le relazioni relative alla regione vicino alla parete sono

$$\hat{S} = |\overline{\Omega}| + \frac{\hat{\nu}}{k^2 d^2} f_{\nu 2} \quad \chi \equiv \frac{\hat{\nu}}{\nu} \quad (\text{I.59})$$

e

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} \quad c_{\nu 1} = 7.1 \quad (\text{I.60})$$

I termini e le relazioni relativi alla transizione si scrivono

$$\begin{aligned} f_{t1} &= c_{t1} g_t \quad \exp \left(-c_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} \left[d^2 + (g_t d_t)^2 \right] \right) \\ f_{t2} &= c_{t3} \quad \exp(-c_{t4} \chi^2) \quad g_t = \min[0.1, \Delta U^2 / (\omega_t \Delta x_t)] \\ c_{t1} &= 1 \quad c_{t2} = 2 \quad c_{t3} = 1.2 \quad c_{t4} = 0.5 \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

dove ω_t è la vorticità nel punto di transizione, ΔU il modulo della differenza tra la velocità nel punto del campo di moto e quella nel punto di transizione, Δx_t è il Δx della cella in corrispondenza del punto di transizione e infine d la distanza dalla parete più vicina.

Le condizioni asintotiche sono

$$0.5 \leq (\hat{\nu}/\nu)_\infty \leq 1.341946 \quad (\text{I.62})$$

Sulla parete è

$$\hat{\nu} = 0 \quad (\text{I.63})$$

Una modifica successiva alle (I.59) per migliorare le prestazioni ed evitare che \hat{S} diventi negativo risale al marzo 1993 [24]

$$\hat{S} = f_{\nu 3} |\overline{\Omega}| + \frac{\hat{\nu}}{k^2 d^2} f_{\nu 2} \quad f_{\nu 2} = \left(1 + \frac{\chi}{c_{\nu 2}} \right)^{-3}$$

(I.64)

$$f_{\nu 3} = \left(\frac{(1 + \chi f_{\nu 1})(1 - \chi f_{\nu 2})}{\chi} \right) \quad c_{\nu 2} = 5$$

Nella implementazione inserita in FLOSIM si è trascurato il termine $f_{t1}\rho\Delta U^2$ nella (I.56), in quanto, come spesso riportato in letteratura [16], non produce sostanziali modifiche dei risultati, mentre è stato riscontrato un effettivo miglioramento della convergenza utilizzando le modifiche date dalle (I.64).

Il modello si dimostra valido ed efficiente per applicazioni di interesse aeronautico, soprattutto nella simulazione di flussi intorno a profili alari, mentre risulta meno affidabile per flussi quali getti piani o radiali [33].

I.6.2 Il modello $k-\omega$ SST

Il $k-\omega$ è stato il primo modello a due equazioni proposto alla comunità scientifica. Kolmogorov nel 1942 [15] pose le basi per questo tipo di modello, accoppiando all'equazione dell'energia cinetica turbolenta un'equazione di trasporto per la grandezza ω , da lui definita "rateo di dissipazione di energia per unità di volume e di tempo", e legata alla scala di lunghezza dalla relazione $\omega = ck^{1/2}l$, dove c è una costante e k è l'energia cinetica turbolenta.

Lo sviluppo del modello di Kolmogorov non è spiegato nei dettagli (non sono neanche stabiliti i valori di tutti i coefficienti di chiusura) per cui si possono solo avanzare delle ipotesi su come egli sia giunto alla formulazione delle equazioni del suo modello. Wilcox [33] suppone che attraverso una serie di analisi dimensionali sia giunto a una plausibile chiusura dell'equazione dell'energia cinetica, introducendo una variabile con le dimensioni di un tempo o del suo inverso,

I. IL MODELLO MATEMATICO

ovvero di ω . Successivamente, per postulare l'equazione di trasporto di ω , probabilmente osservò che nel moto di un fluido i processi più comuni sono l'instazionarietà, la convezione, la diffusione, la dissipazione, la dispersione e la produzione. In tal modo, attraverso ragionamenti dimensionali e sulla fisica dei fluidi, formulò la seguente equazione per ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{V}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (\text{I.65})$$

Nella (I.65) si può notare l'assenza di un termine di produzione analogo a quello presente nell'equazione dell'energia. Ciò è in linea con il principio di Kolmogorov per il quale ω è collegato alle scale più piccole della turbolenza, dunque non ha alcuna interazione con il moto medio. In realtà sappiamo che le scale più grandi sono interessate direttamente nella definizione di un'appropriata scala di tempo della turbolenza. Inoltre l'assenza di un termine che tenga conto della viscosità molecolare confina l'applicabilità della (I.65) a numeri di Reynolds elevati.

Nelle formulazioni successive allo sviluppo della modellistica odierna sono stati aggiunti i termini di produzione e viscosi, necessari a una simulazione più corretta dei flussi turbolenti. Come per gli altri modelli, anche per il $k - \omega$ si possono contare oggi decine di stesure e aggiornamenti ogni anno.

Di seguito vengono riportati i punti più importanti di alcune delle versioni inserite nel codice FLOSIM ed in particolare della versione SST utilizzata in questo lavoro.

La versione ritenuta, in qualche modo, la formulazione *standard* è dovuta a Wilcox [33].

L'eddy viscosity è calcolata come

$$\mu_T = \rho k / \omega \quad (\text{I.66})$$

Le equazioni del modello di Wilcox sono

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{V}_j k)}{\partial x_j} = \tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (\text{I.67})$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{V}_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (\text{I.68})$$

dove

$$\tau_{T_{i,j}} = 2\mu_T \left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{S}_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

Il significato dei termini delle equazioni è quello ricorrente, a secondo membro compaiono nell'ordine i termini di produzione, distruzione e diffusione.

Spesso i termini di produzione sono approssimati come [16]

$$\tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \approx \mu_T \Omega^2 \quad (\text{I.69})$$

$$\alpha \frac{\omega}{k} \tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \approx \alpha \rho \Omega^2 \quad (\text{I.70})$$

dove Ω è il modulo della vorticità. Le relazioni e i coefficienti di chiusura sono

$$\beta^* = 0.09 \quad \beta = 0.075 \quad k_p = 0.41 \quad C_\mu = 0.09 \quad (\text{I.71})$$

$$\sigma_\omega = 0.5 \quad \sigma_k = 0.5 \quad \alpha = \frac{\beta}{C_\mu} + \frac{0.5 k_p k_p}{\sqrt{C_\mu}} \quad (\text{I.72})$$

Menter [20] ha successivamente sviluppato un modello $k - \omega$ partendo dalla formulazione originale di Wilcox e dalle equazioni del modello $k - \varepsilon$, ottenendo una versione “zonale” del primo.

Tralasciando la procedura seguita per la formulazione del modello si hanno le seguenti equazioni

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{V}_j k)}{\partial x_j} = \tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (I.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{V}_j \omega)}{\partial x_j} &= \frac{\gamma}{\nu_T} \tau_{T_{i,j}} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \\ &+ 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (I.74)$$

Indicando con ϕ_1 e ϕ_2 i coefficienti ($\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \dots$) dei modelli originali, e con ϕ le costanti delle (I.73)-(I.74), queste ultime si calcolano come

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (I.75)$$

dove le costanti ϕ_1 e ϕ_2 sono

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.5 & \sigma_{\omega 1} &= 0.5 & \beta_1 &= 0.0750 \\ \beta^* &= 0.09 & k &= 0.41 & \gamma_1 &= 0.7913 \end{aligned} \quad (I.76)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{k2} &= 1.0 & \sigma_{\omega 2} &= 0.856 & \beta_2 &= 0.0828 \\ \beta^* &= 0.09 & k &= 0.41 & \gamma_2 &= 0.4403 \end{aligned} \quad (I.77)$$

La funzione di raccordo si calcola come segue:

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (I.78)$$

$$\text{argf1} = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{\omega d^2} \right); \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right) \quad (I.79)$$

$$F_1 = \tanh(\text{argf1}^4) \quad (I.80)$$

Nella (I.79) d è la distanza dalla parete più vicina e il primo argomento contiene la scala di lunghezza turbolenta, $L_T = \sqrt{k}/(0.09\omega)$, il secondo argomento fa sì che F_1 non vada a zero nel sottostrato viscoso, mentre il terzo assicura che la

soluzione non degeneri per bassi valori asintotici di ω .

L'*eddy viscosity* è calcolata come nel $k - \omega$ originale

$$\mu_T = \frac{\rho k}{\omega} \quad (\text{I.81})$$

Oltre alla versione precedentemente mostrata, Menter ha sviluppato anche una modifica che consentisse delle prestazioni migliori in condizioni di flusso separato. Nella formulazione del modello [20], denominato SST (*Shear-Stress-Transport*), si osserva come nei flussi con gradiente avverso di pressione il rapporto tra produzione e dissipazione di energia cinetica turbolenta possa diventare molto maggiore di uno. Ciò comporta che ci sia una sovrastima della τ_T . Onde ovviare a questo inconveniente Menter propone una ridefinizione della μ_T del tipo

$$\mu_T = \frac{\rho k / \omega}{\min[a_1 \rho k; \Omega F_2]} \quad (\text{I.82})$$

dove a_1 è una costante, Ω è la vorticità (*shear-strain rate*) e F_2 è un'altra funzione di raccordo che garantisce che la modifica sia attivata solo nei flussi in presenza di pareti.

La F_2 è definita in maniera analoga alla F_1

$$\text{argf2} = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}; \frac{500 \nu}{\omega d^2}\right) \quad (\text{I.83})$$

$$F_2 = \tanh(\text{argf2}) \quad (\text{I.84})$$

e le costanti sono le stesse definite per il modello "zonale" con queste differenze e aggiunte

$$\sigma_{k1} = 0.85 \quad a_1 = 0.31 \quad (\text{I.85})$$

I. IL MODELLO MATEMATICO

Si vuol finire indicando le condizioni al contorno comuni ai modelli descritti.

Condizioni di corrente asintotica

$$k_\infty/V_\infty^2 = 9.E - 09 \quad 0.001 \leq (\mu/\mu_T)_\infty \leq 1. \quad (\text{I.86})$$

Condizione sulla parete

$$k_w = 0 \quad \omega_w = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 d^2} \quad (\text{I.87})$$

In realtà per questa classe di modelli è spesso consigliata per ω_w una relazione di questo tipo [33]

$$\omega_w = \frac{2500\nu_w}{k_s^2} \quad k_s = k_s^+ u_\tau / \nu \quad k_s^+ < 5 \quad (\text{I.88})$$

che tiene conto della rugosità della superficie ma che può essere utilizzata per pareti lisce pur di rispettare la relazione, su riportata, $k_s^+ < 5$, che garantisce la condizione di superficie “idraulica liscia” [25].

Nella implementazione effettuata in FLOSIM si è scelto di usare comunque la (I.86), così come riportata in [20].

I.7 Equazioni adimensionali

Il sistema (I.2) può essere scritto in forma adimensionale scegliendo le seguenti grandezze di riferimento

$$\begin{aligned} x_r = y_r = L \quad u_r = v_r = \sqrt{p_\infty/\rho_\infty} \quad t_r = L/u_r \\ \rho_r = \rho_\infty \quad p_r = p_\infty \quad T_r = T_\infty \\ E_r = H_r = u_r^2 \quad \mu_r = \mu_\infty \quad k_r = k_\infty = \frac{c_p \mu_\infty}{\text{Pr}} \end{aligned} \quad (\text{I.89})$$

dove L è una lunghezza caratteristica di un dato problema ed il pedice $(\cdot)_\infty$ indica, tipicamente in fluidodinamica esterna, le condizioni della corrente asintotica. Per problemi di fluidodinamica interna è più consueto assumere che le condizioni di riferimento siano quelle di ristagno.

Nelle espressioni che saranno date in questo paragrafo si supporrà che la generica grandezza f sia adimensionale. Il suo valore dimensionale f_d sarà dato da $f_d = f \cdot f_r$.

Dalla (I.2), tenendo conto delle (I.89), si ottiene il sistema

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_E n_x + \mathbf{G}_E n_y) ds = \frac{1}{\text{Re}_r} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_V n_x + \mathbf{G}_V n_y) ds \quad (\text{I.90})$$

dove $\text{Re}_r = \rho_\infty u_r L / \mu_\infty$ è il numero di Reynolds basato sulle grandezze di riferimento. Le velocità adimensionali annidate nei termini delle equazioni (I.90) rappresentano, a meno di un fattore $\sqrt{\gamma}$, dei numeri di Mach locali cioè misurano l'energia cinetica della generica particella fluida rispetto alla sua energia termica di riferimento. Se si pensa di simulare numericamente un dato flusso e si assegna lo stato termodinamico di riferimento ed i numeri Re_∞ e M_∞ , che di solito vengono forniti negli esperimenti, il numero di Reynolds che tipicamente compare nei termini viscosi delle equazioni di Navier-Stokes deve essere adeguato alla scelta della velocità di riferimento. Esso è dato dalla espressione

$$\text{Re}_r = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty} \frac{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}}{\sqrt{\gamma} V_\infty} = \frac{\text{Re}_\infty}{\sqrt{\gamma} \text{M}_\infty} \quad (\text{I.91})$$

Per bassi numeri di Mach, cioè quando la velocità del suono asintotica è molto più grande di V_∞ , secondo la (I.91) il numero di Reynolds di riferimento è molto più alto di quello basato sulla velocità asintotica della corrente.

I. IL MODELLO MATEMATICO

Le espressioni dei flussi convettivi \mathbf{F}_E e \mathbf{G}_E sono analoghe a quelle date dalle (I.13). I flussi viscosi adimensionali sono dati invece dalle

$$\mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v - \beta q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v - \beta q_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.92})$$

dove

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{I.93})$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{I.94})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{I.95})$$

$$q_x = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{I.96})$$

$$q_y = -\beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (\text{I.97})$$

Nelle espressioni adimensionali delle componenti del flusso termico, in cui $k = \mu$, compare il termine

$$\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{\text{Pr}} \quad (\text{I.98})$$

funzione della temperatura adimensionale locale

$$T = \frac{p}{\rho} \quad (\text{I.99})$$

I.8 Il calcolo dei coefficienti aerodinamici

Fissato un volume di controllo $\Omega \subset R^2$ di frontiera $\partial\Omega$ intorno ad una geometria arbitraria e, ricordando le relazioni (I.2),(I.5), possiamo scrivere il bilancio di

I.8 Il calcolo dei coefficienti aerodinamici

quantità di moto in forma integrale per un flusso in moto stazionario come

$$\int_{\partial\Omega} [\rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \vec{n}) + p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}] ds = 0 \quad (\text{I.100})$$

avendo indicato con \vec{n} la normale a $\partial\Omega$ orientata positivamente se uscente (fig. I.3). Decomponiamo la superficie di controllo $\partial\Omega$ come

$$\partial\Omega = \partial\Omega_c + \partial\Omega_l \quad (\text{I.101})$$

in cui $\partial\Omega_c$ è la superficie del corpo e $\partial\Omega_l$ è la superficie “lontana” dal corpo.

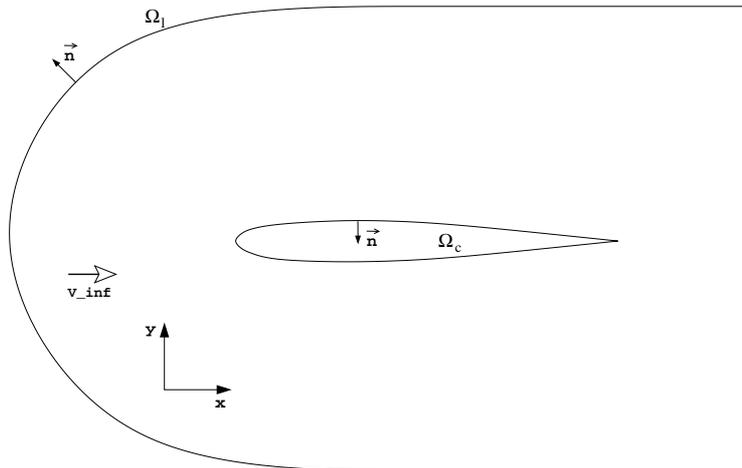


Figura I.2: Schematizzazione per il calcolo dei coefficienti aerodinamici

Tenendo conto di questa decomposizione ed imponendo la condizione di velocità nulla sul corpo ($\underline{V} \cdot \vec{n} = 0$ in assenza di soffiamenti o aspirazioni attraverso la parete solida) si ricava il risultante \underline{R} delle forze aerodinamiche che il fluido in movimento esercita sul corpo:

$$\underline{R} = \int_{\partial\Omega_c} [p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}] ds = - \int_{\partial\Omega_l} [\rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \vec{n}) + p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}] ds \quad (\text{I.102})$$

I. IL MODELLO MATEMATICO

Dalla (I.102) si vede come il calcolo delle forze agenti sul corpo possa avvenire in due modi differenti:

- con il metodo di campo vicino che consiste nel valutare \underline{R} attraverso l'integrazione degli sforzi normali e tangenziali sulla superficie solida del corpo

$$\underline{R} = \int_{\partial\Omega_c} [p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}] ds \quad (\text{I.103})$$

- con il metodo di campo lontano in cui si integra il bilancio di quantità di moto sulla superficie $\partial\Omega_l$ fissandola opportunamente distante dal corpo

$$\underline{R} = - \int_{\partial\Omega_l} [\rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \vec{n}) + p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}] ds \quad (\text{I.104})$$

Le due metodologie di calcolo sono state oggetto di studio da parte di Lorenzo [18]. L'accuratezza degli integrali superficiali nel metodo di campo vicino è legata esclusivamente alla conoscenza dettagliata delle distribuzioni di pressione e sforzi tangenziali sulla superficie del corpo. Gli errori numerici e di troncamento presenti nella soluzione numerica incidono fortemente sul calcolo del coefficiente di resistenza che può essere anche di due ordini di grandezza più basso del coefficiente di portanza (per maggiori approfondimenti su questo argomento si veda Lorenzo [18]). Non sembra superfluo osservare che entrambi i metodi falliscono laddove la soluzione numerica non è sufficientemente accurata a causa dei limiti del modello di turbolenza utilizzato. Nel codice FLOSIM si fa uso del metodo di campo vicino per il calcolo dei coefficienti aerodinamici. Consideriamo, per semplicità, il caso di un corpo bidimensionale (ad esempio un profilo alare) investito da una corrente indisturbata con vettore velocità \vec{V}_∞

I.8 Il calcolo dei coefficienti aerodinamici

diretto lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano (Oxy). Il risultante delle forze aerodinamiche agenti sul corpo abbiamo visto essere (I.103)

$$\underline{R} = \int_{\partial\Omega_c} [p\vec{n} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{n}] ds \quad (\text{I.105})$$

La portanza è data dalla proiezione del risultante \underline{R} lungo l'asse y

$$L = \int_{\partial\Omega_c} [pn_y - \tau_{yy}n_y - \tau_{yx}n_x] ds \quad (\text{I.106})$$

in cui n_x, n_y sono le componenti del versore normale alla superficie solida e τ_{yy}, τ_{yx} le tensioni alla parete lungo y . La resistenza totale è data dalla proiezione del risultante \underline{R} lungo l'asse x

$$D = \int_{\partial\Omega_c} [pn_x - \tau_{xx}n_x - \tau_{xy}n_y] ds \quad (\text{I.107})$$

con τ_{xx}, τ_{xy} le tensioni alla parete lungo x . Introducendo il termine nullo $\int_{\partial\Omega} p_\infty n_x ds = 0$, la (I.107) può essere scritta nella forma

$$D = \int_{\partial\Omega_c} [(p - p_\infty)n_x - \tau_{xx}n_x - \tau_{xy}n_y] ds \quad (\text{I.108})$$

Nella (I.108) si riconoscono i contributi alla resistenza totale D_p e D_f

$$D = D_p + D_f \quad (\text{I.109})$$

definiti nella letteratura classica con i nomi di “resistenza di pressione”

$$D_p = \int_{\partial\Omega_c} [(p - p_\infty)n_x] ds \quad (\text{I.110})$$

e “resistenza di attrito”

$$D_f = - \int_{\partial\Omega_c} [\tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y] ds \quad (\text{I.111})$$

I. IL MODELLO MATEMATICO

Si definisce inoltre il momento della forza aerodinamica come

$$\underline{M} = \underline{R} \wedge \underline{d} \quad (\text{I.112})$$

in cui \underline{d} rappresenta il vettore posizione $\underline{x}_R - \underline{x}_{rif}$ del punto di applicazione del risultante \underline{x}_R rispetto al punto scelto come polo dei momenti \underline{x}_{rif} detto “fuoco” (di solito posto ad 1/4 della corda del profilo). La (I.112) può anche scriversi in termini di prodotto vettoriale fra lo sforzo locale $[p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}]$ ed il relativo vettore posizione \underline{r} rispetto al fuoco, come

$$\underline{M} = \int_{\partial\Omega_c} [(p\vec{n} - \underline{\tau} \cdot \vec{n}) \wedge \underline{r}] ds \quad (\text{I.113})$$

con \underline{r} dato da

$$\underline{r} = \underline{x} - \underline{x}_{rif} \quad (\text{I.114})$$

Una volta valutata la distribuzione di pressione, la portanza ed il momento della forza aerodinamica si introducono i relativi coefficienti aerodinamici

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \quad (\text{I.115})$$

$$C_l = \frac{L}{q_\infty} \quad (\text{I.116})$$

$$C_m = \frac{M}{q_\infty} \quad (\text{I.117})$$

dove $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ è la pressione dinamica del flusso indisturbato. In base alla (I.109) si introducono il coefficiente di resistenza di pressione

$$C_{d_p} = \frac{D_p}{q_\infty} \quad (\text{I.118})$$

ed il coefficiente di resistenza d’attrito alla parete

$$C_{d_f} = \frac{D_f}{q_\infty} \quad (\text{I.119})$$

I.8 Il calcolo dei coefficienti aerodinamici

Infine, seguendo l'adimensionalizzazione introdotta precedentemente, per la pressione dinamica si ricava l'espressione in funzione del numero di Mach

$$q_{\infty} = \frac{\gamma}{2} p_{\infty} M_{\infty}^2 \quad (\text{I.120})$$

in cui compare la p_{∞} utilizzata per adimensionalizzare la pressione statica locale.

Capitolo II

IL CODICE FLOSIM

FLOSIM è un codice di tipo Eulero/Navier-Stokes per geometrie bidimensionali sviluppato a partire dal 1993 al Dipartimento di Progettazione Aeronautica (DPA). I numerosi contributi apportati nel corso degli anni permettono attualmente di poter simulare flussi bidimensionali turbolenti relativi a geometrie anche molto complesse. Ad esempio grazie alla suddivisione del dominio di calcolo in blocchi si possono utilizzare le griglie per profili multilappati mentre la possibilità di disporre di tecniche di accelerazione della convergenza ha reso operativi i tempi di calcolo. L'aggiornamento poi dei modelli di turbolenza può permettere di effettuare simulazioni qualitativamente molto valide.

Non tutti i particolari del codice verranno illustrati in questo capitolo: per eventuali approfondimenti si potranno consultare i riferimenti bibliografici.

II.1 Discretizzazione del dominio di calcolo

Il primo passo verso la risoluzione delle equazioni del moto consiste nella scelta di un numero finito di incognite (vettori di stato) e nella discretizzazione del dominio di calcolo in volumi di controllo (celle). Quest'ultima consiste nella

generazione di una griglia di calcolo (mesh) costituita da due famiglie di curve che si intersecano generando nodi e celle a cui sono associati versori normali e volumi. Nei nodi si definisce il riferimento computazionale (ξ, η) in cui le due variabili assumono valori corrispondenti agli indici di un array.

Nell'approccio di calcolo ai 'volumi di controllo' le grandezze termofluidodinamiche sono riferite ai centroidi delle celle di forma quadrilatera. Tali valori sono memorizzati in un array bidimensionale in modo che vi sia una corrispondenza fra celle adiacenti nel mesh e locazioni adiacenti nell'array.

Questo modo di memorizzare i dati rende strutturata la griglia (fig. II.1), nel senso che ad ogni nodo sono associate le sue coordinate fisiche ricavabili dalle

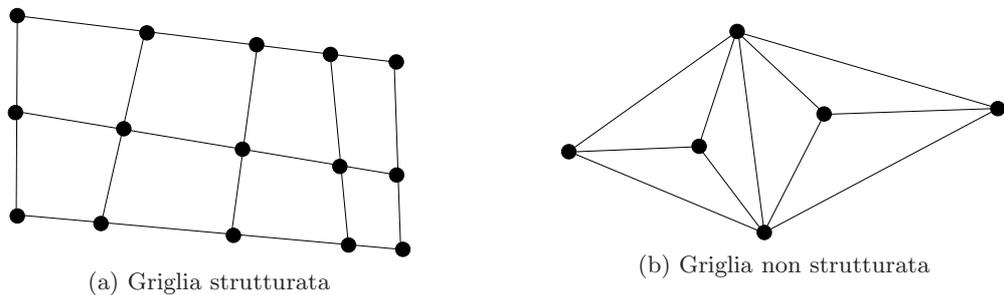


Figura II.1: Tipologie di griglie

coordinate computazionali secondo la legge di trasformazione $\vec{x} = \vec{x}(\xi, \eta)$.

Nel caso di contorni curvi è necessaria una rappresentazione attraverso coordinate curvilinee (*body-fitted*) in modo da mantenere la corrispondenza fra bordi del dominio fisico e quelli del dominio computazionale.

Come detto, anche se la griglia fisica contiene linee curve si può rappresentarla come un dominio rettangolare grazie all'adozione delle coordinate curvilinee ξ

ed η ; così facendo risulta più immediato associare alle locazioni dell'*array* le grandezze fisiche corrispondenti.

Un tipico esempio di topologia di griglia strutturata bidimensionale è mostrata in figura II.2. Ogni cella è individuata da due coppie di indici:

- indici di centrocella: nel centroide di ogni cella si fissa un riferimento (i, j) , con $i = 1, \dots, N_i$ e $j = 1, \dots, N_j$;
- indici dei nodi: per convenzione si stabilisce nel nodo in basso a sinistra di ogni cella un riferimento (ξ, η) , con $\xi = 1, \dots, N_i + 1$ ed $\eta = 1, \dots, N_j + 1$ che nel dominio fisico assumono il significato di coordinate curvilinee.

Nel Metodo dei Volumi Finiti si possono considerare come incognite i valori medi $\widetilde{\mathbf{W}}_{i,j}$ delle variabili dipendenti sul volume delle celle ed associati ai centroidi dei volumi di controllo.

Si consideri per ora il caso di un dominio fisico ricoperto interamente da un unico blocco. Nel trattamento delle condizioni al contorno si deve tener conto del fatto che sono i nodi estremi della griglia a trovarsi esattamente sulla frontiera del dominio e non i centroidi delle celle più esterne del blocco. Inoltre le condizioni al contorno richiedono ad alcune delle variabili dipendenti di assumere un determinato valore in corrispondenza degli *edges*. Allora, nel processo numerico è necessario introdurre delle file aggiuntive di celle, dette *extracelle*, esterne al dominio fisico e disposte lungo gli *edges*. La numerazione andrà lungo i (lungo j), da 0 ad $N_i + 1$ (da 0 ad $N_j + 1$). Il trattamento del contorno, per esempio lungo l'*edge* $\xi = N_i + 1$ ($i = N_i + 1/2$) in figura II.2, impone ad

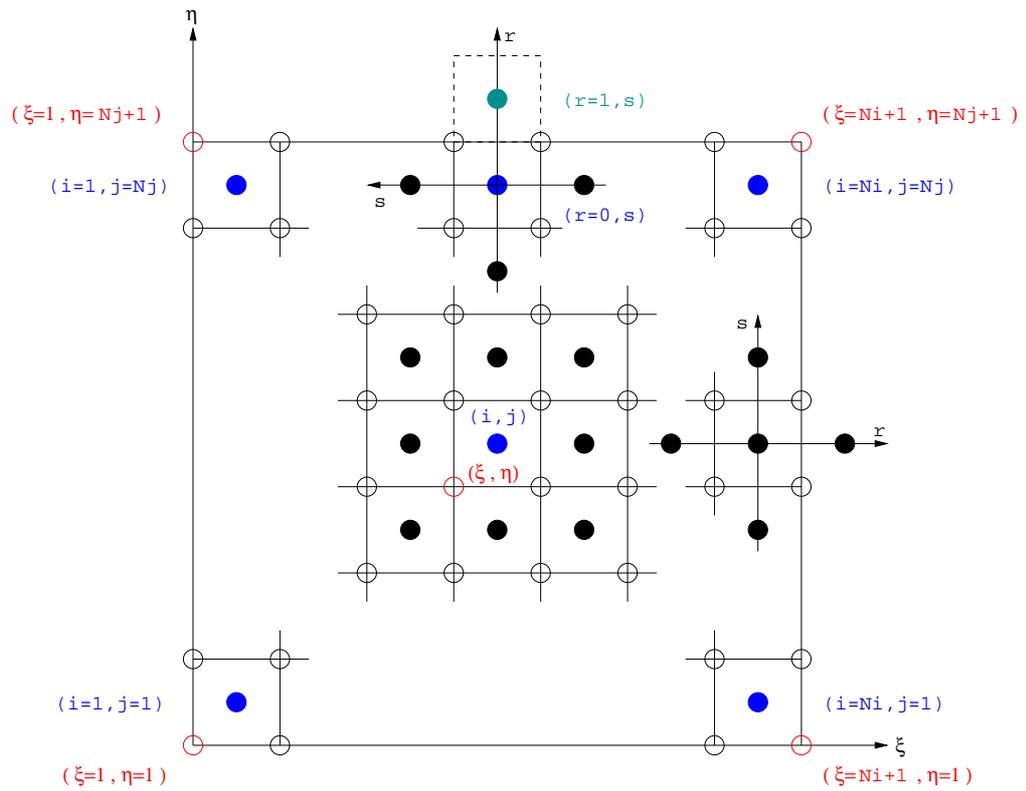


Figura II.2: Blocco di una griglia strutturata bidimensionale: convenzioni e numerazione degli indici; definizione della famiglia di indici ausiliari per le celle sul contorno.

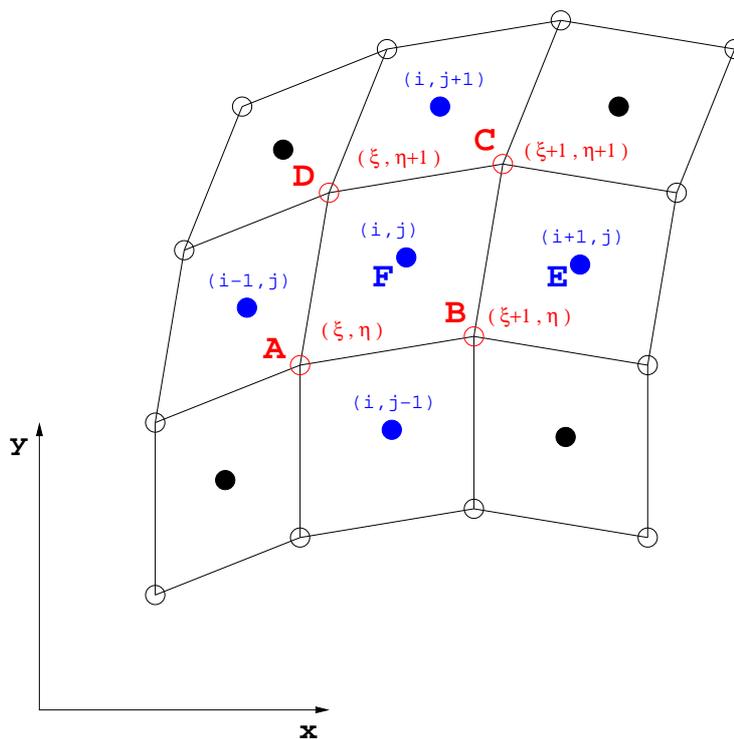


Figura II.3: Griglia strutturata bidimensionale; convenzioni per la definizione degli indici delle celle e dei nodi.

II. IL CODICE FLOSIM

alcune grandezze del tipo $(\cdot)_{N_i+1,j}$ dei valori che, mediati con i rispettivi valori di $(\cdot)_{N_i,j}$, soddisfino le condizioni al contorno richieste per $i = N_i + 1/2$.

In questa parte del processo, risulta comodo definire una coppia di indici ausiliari (r, s) lungo ciascun *edge* (fig. II.2). L'asse degli r è sempre positivamente orientato nel verso uscente ed s è orientato sempre in modo che la coppia (r, s) sia congruente con (x, y) . Le extracelle avranno l'indice $r = 1$ mentre le celle interne al blocco avranno l'indice $r \leq 0$. Per gli *edges* $\eta = 1$ ed $\eta = N_j + 1$ ($\xi = 1$ ed $\xi = N_i + 1$) l'asse degli s è orientato come l'asse degli ξ (degli η).

Nel quadro della numerazione delle diverse grandezze geometriche introdotte sopra, è possibile passare, ad esempio, dal riferimento (r, s) al riferimento (i, j) attraverso la trasformazione

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{IO} \\ \text{JO} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{IR} & \text{IS} \\ \text{JR} & \text{JS} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

dove IO, JO sono gli indici origine di (r, s) rispetto ad (i, j) . In particolare, nel caso dell'*edge* $\eta = 1$ si ha

$$\begin{pmatrix} \text{IR} & \text{IS} \\ \text{JR} & \text{JS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e JO = 1.

Trasformazioni analoghe sussistono tra le coppie di indici nodali (ξ, η) e le corrispondenti coppie di indici nodali rispetto al riferimento (r, s) [21].

Nelle applicazioni per la simulazione numerica di flussi intorno a geometrie più o meno complesse, si ricorre a codici di calcolo articolati ed interattivi. La fase di *pre-processing* della geometria e di generazione della griglia sono affrontate preliminarmente. La fase centrale del processo di calcolo è devoluta ad un

solver per il quale la griglia è un dato di *input*. Esso risolve, in sostanza, le equazioni discretizzate che discendono dallo schema numerico adottato. La fase finale consiste nella acquisizione, visualizzazione ed analisi dei risultati numerici.

II.1.1 Requisiti geometrici e topologici

Sebbene le griglie strutturate siano generabili in maniera nient'affatto semplice, esse sono emerse, a partire dalla metà degli anni '80 come la soluzione maggiormente preferita per i problemi di interesse aeronautico.

L'uso di una singola griglia strutturata per una data geometria richiede l'esistenza di una corrispondenza (*mapping*) che copra l'intero dominio fisico trasformandolo in un *rettangolo* computazionale. Per geometrie semplici la definizione di una tale trasformazione non comporta eccessive difficoltà. Per forme più complesse dei contorni, può essere praticamente impossibile trasformare l'intero dominio fisico in un rettangolo di calcolo, specialmente quando viene richiesto un arbitrario ordine di differenziabilità della $\vec{x}(\xi, \eta)$ ed un elevato grado di ortogonalità delle curve coordinate. Per sormontare queste difficoltà, è logico dividere il dominio fisico in un dato numero di regioni più piccole e più semplici da discretizzare. L'intero dominio computazionale è dato dall'unione di sottodomini, o *blocchi*, ciascuno dei quali è un rettangolo. Un blocco lungo ciascuno dei suoi quattro lati, o *edges* in gergo, può confinare anche con più blocchi. In tal caso l'*edge* si dice *compound* ed è l'unione di più *edges*, detti elementari. L'idea multiblocco è oggi largamente usata nei processi di calcolo. Le grandezze geometriche e la descrizione topologica sono dati di *input* e pos-

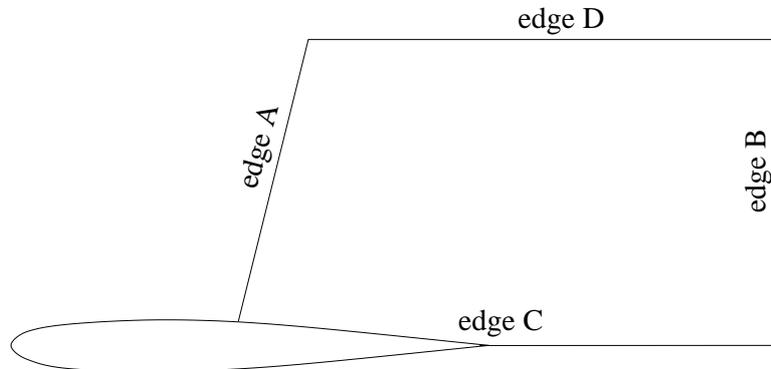


Figura II.4: Esempio di edge vietato

sono essere generati con un qualsiasi *grid generator* purché soddisfino i seguenti requisiti:

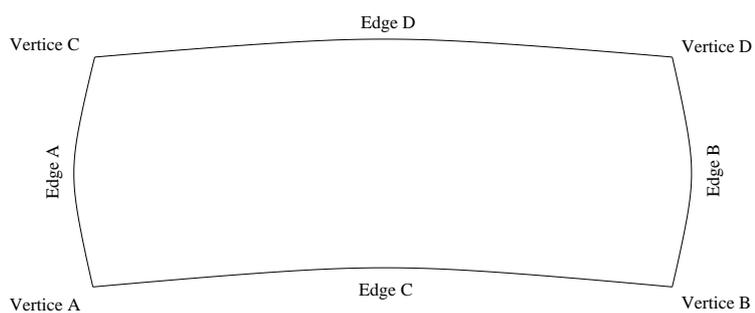
- il dominio di calcolo può essere ripartito in un numero qualsiasi di blocchi (la suddivisione in blocchi non intacca la soluzione essendo lo schema numerico conservativo sulle pareti interne). Ogni blocco è una regione dello spazio \mathbb{R}^2 avente la topologia del quadrato unitario ed è quindi caratterizzato da 4 lati (*edge*), a due a due opposti, e 4 vertici;
- i blocchi devono ricoprire interamente la regione d'interesse senza dar luogo a sovrapposizioni;
- lungo ogni *edge* elementare bisogna assegnare un sol tipo di condizione al contorno. Non sono quindi ammessi blocchi aventi degli *edges* come in figura II.4;
- non è consentito l'impiego di blocchi degeneri (fig. II.5). Questa scelta

deriva dalle seguenti considerazioni:

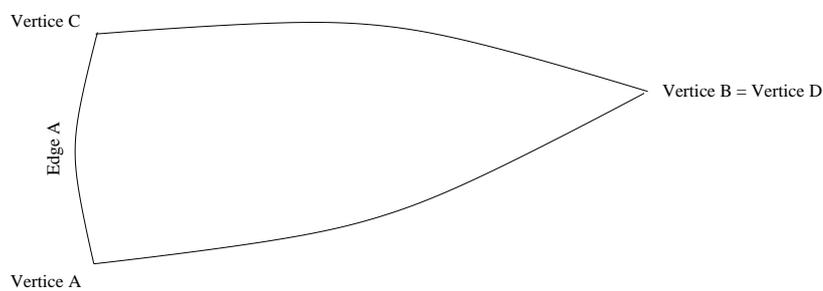
- è sempre possibile effettuare una decomposizione topologica senza ricorrere a blocchi degeneri per i casi di nostro interesse;
 - l'impiego di blocchi degeneri potrebbe influire negativamente sull'accuratezza della soluzione a causa delle griglie sicuramente non *smooth* presenti in essi;
 - nelle applicazioni 2D che usualmente si fanno in campo aerodinamico l'impiego di blocchi degeneri non risulta di grossa utilità;
- ogni blocco può confinare lungo ogni lato con più blocchi (*edge compound*). Questo requisito presenta notevoli vantaggi in applicazioni 3D, mentre, come si vedrà tra breve, per geometrie bidimensionali i benefici ottenuti sono minimi. Poiché risulta relativamente facile costruire un algoritmo capace di gestire dei *compound edges*, si utilizza comunque questo tipo di topologia.

Nelle applicazioni che usualmente si fanno in campo aeronautico attorno a geometrie bidimensionali, l'utilizzo di topologie in cui ogni blocco confini lungo ogni lato unicamente con un solo blocco (*face to face packing*, FFP, fig. II.6(a)) comporta l'impiego di un numero di blocchi non eccessivamente alto (circa 25, 30 rispetto ai 500, 1000 richiesti in applicazioni tridimensionali).

I benefici derivanti dall'uso di *compound edges*, ossia



(a) Blocco tipico



(b) Blocco degenero

Figura II.5: Tipologie di blocchi computazionali

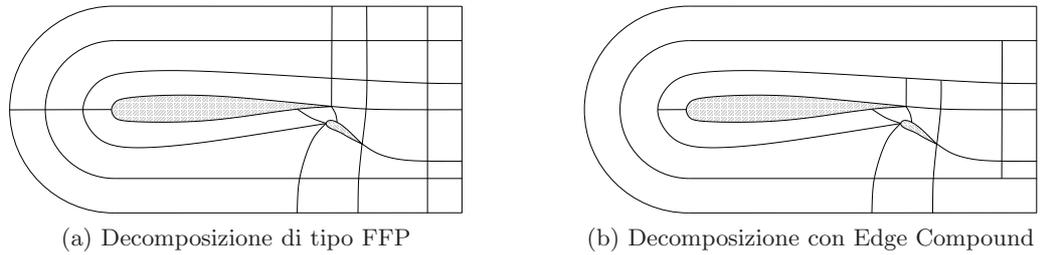


Figura II.6: Confronto tra tecnica FFP e tecnica Edge Compound

- possibilità di modificare localmente la topologia senza intaccare la decomposizione in blocchi in tutto il dominio,
- riduzione del numero di blocchi impiegati con conseguente riduzione della memoria richiesta per conservare i dati topologici,
- possibilità di operare con blocchi con un grosso numero di celle con conseguente aumento dell'efficienza di calcolo su elaboratori vettoriali,

in applicazioni bidimensionali non sono significativi. Si consideri, ad esempio, il caso del profilo bicomponente di figura II.6 (b). L'utilizzo di *compound edges* consente di impiegare 17 blocchi anziché 25, 44 *edges* anziché 60 e 26 vertici anziché 34.

Lo spazio occupato in memoria per immagazzinare i dati topologici dipende logicamente dal numero di elementi impiegati. Per la topologia con FFP tale spazio è circa il doppio di quello relativo alla topologia con *compound edges* ma resta comunque piccolo. Bisogna inoltre considerare che lo spazio occupato in memoria per immagazzinare i dati topologici è solo una minima parte della quantità totale di memoria richiesta.

- le griglie all'interno dei blocchi devono essere sufficientemente regolari da conservare l'accuratezza al secondo ordine consentita dallo schema numerico impiegato,
- sulle pareti interne sono consentite griglie 'parzialmente continue', ossia con discontinuità nello *stretch*, nelle pendenze e nel numero di *grid points* (purchè il rapporto tra il numero di celle dell'uno e dell'altro blocco sia un numero intero);
- in ogni blocco la griglia deve essere *boundary conforming*, ossia ognuno dei quattro *edges* deve essere una linea di griglia ed i vertici devono essere dei nodi.

II.2 Discretizzazione del modello matematico

La struttura matematica delle leggi integrali del bilancio gode della proprietà additiva. Quindi è sufficiente verificare la conservazione per un insieme $\{\Omega_J\}$ (con $J = 1 \dots N$) di N volumi, elementari ma *finiti*, tali che $\Omega_I \cap \Omega_J = \emptyset$ per $I \neq J$ e che $\Omega = \bigcup_J \Omega_J$. La conservazione locale implica quella globale.

La cosiddetta formulazione *semidiscretizzata* corrispondente alla (I.2) è data dalla

$$\mathcal{V}_J \frac{d}{dt} \widetilde{\mathbf{W}}_J + \oint_{\partial\Omega_J} \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{W}(\vec{x}_B, t)) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{II.2})$$

dove $\vec{x}_B \in \partial\Omega_J$, mentre

$$\mathcal{V}_J \equiv m(\Omega_J) = \int_{\Omega_J} d\Omega \quad (\text{II.3})$$

è la misura del J -mo volume finito ed infine

$$\widetilde{\mathbf{W}}_J = \frac{1}{\mathcal{V}_J} \int_{\Omega_J} \mathbf{W} d\Omega \quad (\text{II.4})$$

è il valor medio del vettore delle variabili conservative sulla regione elementare considerata. Le (II.2) sono scritte per delle regioni Ω_J che non variano nel tempo.

Passando alla discretizzazione nel tempo, per due istanti successivi t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, si ottiene dalla (II.2)

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{n+1} - \widetilde{\mathbf{W}}^n + \tau \oint_{\partial\Omega_J} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{II.5})$$

con $\tau = \Delta t/\nu_J$ ed

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{W}) = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{W}(\vec{x}_B, t)) dt \quad (\text{II.6})$$

È importante far notare che la formulazione completamente discretizzata (II.5) richiede la valutazione del flusso mediato nel tempo $\vec{\mathbf{F}}$. Esso può essere determinato esattamente solo se la soluzione $\mathbf{W}(\vec{x}, t)$ è nota. Quindi si deve in qualche modo predirne l'evoluzione, ad esempio in termini dei valori discreti approssimati $[\widetilde{\mathbf{W}}_J^n]$ noti al tempo t_n (par. II.6).

Una volta scelto il vettore di stato, possono essere costruite le relazioni algebriche per approssimare il flusso di \mathbf{W} attraverso le facce del volume $\Omega_{i,j}$. Consideriamo, ad esempio, la cella (i,j) individuata dai punti ABCD di figura II.3.

Dalla (II.2) di ottiene

$$\mathcal{V}_{i,j} \frac{d}{dt} \widetilde{\mathbf{W}}_{i,j} + \mathcal{D} \widetilde{\mathbf{W}}_{i,j} = 0 \quad (\text{II.7})$$

II. IL CODICE FLOSIM

dove \mathcal{D} è un operatore di discretizzazione spaziale dato dalla somma di tre operatori

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_C + \mathcal{D}_A + \mathcal{D}_V \quad (\text{II.8})$$

convettivo (C), di dissipazione artificiale (A) e diffusivo (V). Nel paragrafo II.2.1 viene spiegato come l'operatore (euleriano) $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}_C + \mathcal{D}_A$ derivi dalla discretizzazione della parte non diffusiva del flusso di \mathbf{W} attraverso le facce del volume finito.

Se si denota con $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_4)$ l'insieme dei lati AB, BC, CD, DA, il secondo termine a primo membro della (II.7) si può scrivere come I.11

$$\mathcal{D}\widetilde{\mathbf{W}}_{i,j} = \sum_{k=1}^4 \left(\vec{\mathbf{H}}_E - \vec{\mathbf{H}}_V \right) \Big|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} \quad (\text{II.9})$$

dove con $\vec{\mathbf{H}}_{E(V)}$ si indica usualmente una funzione flusso numerico che approssima il flusso euleriano (viscoso) $\vec{\mathbf{F}}_{E(V)}$ ed il cui significato sarà precisato nel paragrafo II.2.1. I vettori \vec{n}_{ℓ_k} hanno per modulo la lunghezza del lato ℓ_k e sono dati dalle

$$\vec{n}_{\ell_k} = (\Delta y)_{\ell_k} \vec{i} + (\Delta x)_{\ell_k} \vec{j} \quad (\text{II.10})$$

Con dei segni opportuni per le differenze di coordinate $(\Delta x)_{\ell_k}$ ed $(\Delta y)_{\ell_k}$, essi sono diretti normalmente alla faccia della cella ed orientati nel verso uscente.

Ad esempio, per il lato AB si ha

$$(\Delta y)_{AB} = y_B - y_A \quad , \quad (\Delta x)_{CD} = -(x_B - x_A)$$

L'area $\mathcal{V}_{i,j}$ viene calcolata secondo la formula

$$\mathcal{V}_{i,j} = \frac{1}{2} |(x_C - x_A)(y_D - y_B) - (y_C - y_A)(x_D - x_B)| \quad (\text{II.11})$$

che mostra come l'area di un quadrilatero possa ricavarsi dal modulo del prodotto vettoriale di una coppia di vettori che connettono vertici opposti.

II.2.1 Flussi convettivi non viscosi

Lo schema numerico utilizzato è il classico schema JST e per i dettagli sulla genesi dei diversi termini si rimanda a Jameson *et al.* [12], Swanson e Turkel [30] e De Marco [6].

Per le equazioni bidimensionali, eliminando per comodità il simbolo $\widetilde{(\cdot)}$ di media sul volume finito, la parte euleriana della (II.9) si può scrivere come

$$\mathcal{D}_E \mathbf{W}_{i,j} = \sum_{k=1}^4 \left. \vec{\mathbf{H}}_E \right|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} = \sum_{k=1}^4 \left(\vec{\mathbf{F}}_E - \vec{\mathbf{D}}_A \right) \Big|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} \quad (\text{II.12})$$

dove $\vec{\mathbf{F}}_E$ è il flusso 'convettivo' e $\vec{\mathbf{D}}_A$ il flusso dissipativo artificiale. Il termine convettivo si definisce come

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_C \mathbf{W}_{i,j} &= \sum_{k=1}^4 \left. \vec{\mathbf{F}}_E \right|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} = \\ &= \left(\widehat{\mathbf{F}}_E \right)_{i+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{F}}_E \right)_{i-1/2} + \left(\widehat{\mathbf{G}}_E \right)_{j+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{G}}_E \right)_{j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

dove le grandezze $\widehat{(\cdot)}$ rappresentano le proiezioni del flusso convettivo sulle normali alle facce della cella $\Omega_{i,j}$. In particolare si ha

$$\left(\widehat{\mathbf{F}}_E \right)_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \rho_{i+1/2,j} \mathbf{Q}_{i+1/2,j} \\ (\rho u)_{i+1/2,j} \mathbf{Q}_{i+1/2,j} + p_{i+1/2,j} \mathbf{NXJ}_{i+1/2,j} \\ (\rho v)_{i+1/2,j} \mathbf{Q}_{i+1/2,j} + p_{i+1/2,j} \mathbf{NYJ}_{i+1/2,j} \\ (\rho H)_{i+1/2,j} \mathbf{Q}_{i+1/2,j} \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

$$\left(\widehat{\mathbf{G}}_E \right)_{j+1/2} = \begin{pmatrix} \rho_{i,j+1/2} \mathbf{Q}_{i,j+1/2} \\ (\rho u)_{i,j+1/2} \mathbf{Q}_{i,j+1/2} + p_{i,j+1/2} \mathbf{NXI}_{i,j+1/2} \\ (\rho v)_{i,j+1/2} \mathbf{Q}_{i,j+1/2} + p_{i,j+1/2} \mathbf{NYI}_{i,j+1/2} \\ (\rho H)_{i,j+1/2} \mathbf{Q}_{i,j+1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

II. IL CODICE FLOSIM

dove, in base alla figura II.3, le grandezze NXJ, NYJ, NXI, NYI sono definite dalle (cfr. (II.10))

$$\begin{aligned}
 -\vec{n}_{AB} &= \text{NXI}_{\xi,\eta} \vec{v} + \text{NYI}_{\xi,\eta} \vec{j} &= \text{NXI}_{i,j-1/2} \vec{v} + \text{NYI}_{i,j-1/2} \vec{j} \\
 \vec{n}_{CD} &= \text{NXI}_{\xi,\eta+1} \vec{v} + \text{NYI}_{\xi,\eta+1} \vec{j} &= \text{NXI}_{i,j+1/2} \vec{v} + \text{NYI}_{i,j+1/2} \vec{j} \\
 \vec{n}_{BC} &= \text{NXJ}_{\xi+1,\eta} \vec{v} + \text{NYJ}_{\xi+1,\eta} \vec{j} &= \text{NXJ}_{i+1/2,j} \vec{v} + \text{NYJ}_{i+1/2,j} \vec{j} \\
 -\vec{n}_{CD} &= \text{NXJ}_{\xi,\eta} \vec{v} + \text{NYJ}_{\xi,\eta} \vec{j} &= \text{NXJ}_{i-1/2,j} \vec{v} + \text{NYJ}_{i-1/2,j} \vec{j}
 \end{aligned}$$

Nelle (II.14), (II.15) compaiono le medie aritmetiche dei valori che le incognite assumono nelle celle adiacenti che condividono la faccia considerata. Ad esempio, per la faccia $i + 1/2$ si ha

$$\mathbf{W}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{i,j} + \mathbf{W}_{i+1,j}) \quad (\text{II.16})$$

e $(\rho H)_{i+1/2,j} = ((\rho H)_{i,j} + (\rho H)_{i+1,j})/2$. Sulla stessa faccia la *velocità di convezione* $\mathbf{Q}_{i+1/2,j}$ si ricava dalla proiezione della quantità di moto media sulla normale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{i+1/2,j} &= \left[(\rho \vec{V})_{i+1/2,j} \cdot \vec{n}_{BC} \right] / \rho_{i+1/2,j} = \\
 &= \frac{(\rho u)_{i+1/2,j} \text{NXJ}_{i+1/2,j} + (\rho v)_{i+1/2,j} \text{NYJ}_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1/2,j}}
 \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Per la faccia $i - 1/2$ la $(\rho \vec{V})_{i-1/2,j}$ viene invece proiettata su $-\vec{n}_{CD}$ per coerenza con i segni utilizzati per scrivere il bilancio (II.13).

Il modello di dissipazione utilizzato è proprio ciò che caratterizza lo schema di Jameson, Schmidt e Turkel.

Dalla (II.12) si può scrivere il bilancio dei flussi dissipativi artificiali nella forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A \mathbf{W}_{i,j} &= \sum_{k=1}^4 \vec{\mathbf{D}}_A \Big|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} = \\ &= \left(\widehat{\mathbf{F}}_A \right)_{i+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{F}}_A \right)_{i-1/2} + \left(\widehat{\mathbf{G}}_A \right)_{j+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{G}}_A \right)_{j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

in cui le grandezze $\widehat{(\cdot)}$ rappresentano le proiezioni del flusso dissipativo artificiale sulle normali alle facce della cella $\Omega_{i,j}$. In particolare si ha

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{F}}_A \right)_{i+1/2} &= R_{i+1/2,j} \left[\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} \delta_\xi^+ \mathbf{W}_{i,j} + \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} \left(\delta_\xi^+ \mathbf{W}_{i+1,j} - 2\delta_\xi^+ \mathbf{W}_{i,j} + \delta_\xi^+ \mathbf{W}_{i-1,j} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{G}}_A \right)_{j+1/2} &= R_{i,j+1/2} \left[\varepsilon_{i,j+1/2}^{(2)} \delta_\eta^+ \mathbf{W}_{i,j} + \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{i,j+1/2}^{(4)} \left(\delta_\eta^+ \mathbf{W}_{i,j+1} - 2\delta_\eta^+ \mathbf{W}_{i,j} + \delta_\eta^+ \mathbf{W}_{i,j-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

con δ_ξ^+ e δ_η^+ gli operatori di differenza in avanti rispetto agli indici i e j . Per la direzione ξ il fattore di scala R si definisce come

$$R_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_\xi)_{i,j} + (\lambda_\xi)_{i+1,j} + (\lambda_\eta)_{i,j} + (\lambda_\eta)_{i+1,j} \right] \quad (\text{II.21})$$

dove λ_ξ e λ_η sono proporzionali ad una combinazione dei raggi spettrali (autovalori massimi) delle matrici jacobiane \mathbf{A} e \mathbf{B} dei flussi euleriani. In un sistema di coordinate curvilinee $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ essi sono dati dalle

$$\lambda_\xi = |uy_\eta - vx_\eta| + c\sqrt{y_\eta^2 + x_\eta^2} \quad (\text{II.22})$$

$$\lambda_\eta = |vx_\xi - uy_\xi| + c\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \quad (\text{II.23})$$

con u e v le componenti cartesiane della velocità e c velocità caratteristica di Laplace o velocità del suono

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(H - \frac{1}{2} V^2 \right)} \quad (\text{II.24})$$

II. IL CODICE FLOSIM

Se si passa al caso discreto, considerando le grandezze ξ ed η come degli indici computazionali di una griglia, le coppie di derivate $(-y_\xi, x_\xi)$, $(y_\eta, -x_\eta)$ corrispondono rispettivamente alle coppie (NXI, NYI) , (NXJ, NYJ) definite precedentemente. Per la valutazione di $(\lambda_\xi)_{i,j}$, ad esempio, solo per le (NXJ, NYJ) è necessario effettuare una operazione di media aritmetica fra i valori di indice i ed $i + 1$ (ovvero ξ e $\xi + 1$ in fig. II.3).

I coefficienti $\varepsilon^{(2)}$ ed $\varepsilon^{(4)}$ adattivi usano come *sensore d'onda* la pressione e sono definiti dalle

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} &= \min [0.5, \kappa^{(2)} \max (\nu_{i,j}, \nu_{i+1,j})] \\ \nu_{i,j} &= \frac{|p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}|}{|p_{i-1,j} + 2p_{i,j} + p_{i+1,j}|} \\ \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} &= \max \left[0, \left(\kappa^{(4)} - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Le costanti $\kappa^{(2)}$ e $\kappa^{(4)}$ assumono valori che tipicamente sono fra 1/4 ed 1/2 e fra 1/64 ed 1/32 (per comodità e per congruenza con l'input del codice ci si riferirà al coefficiente $\kappa^{(4)}$ in 64^{mi}). Le (II.25) definiscono quello che viene anche chiamato lo *switch JST*. Laddove la p ha forti gradienti la funzione di *switch* ν cresce ed attiva nelle (II.19)-(II.20) i contributi di differenza seconda al flusso totale e disattiva i termini di differenza quarta. In regioni del genere la dissipazione totale è del primo ordine. Nelle regioni in cui il campo di moto è regolare ($\nu \simeq 0$) la dissipazione totale è del terzo ordine. In tal caso i termini di differenza quarta smorzamo le alte frequenze dell'errore che lo schema centrato da solo, non riuscirebbe a smorzare. Questo è utile soprattutto se si vuole raggiungere una soluzione stazionaria.

Le proprietà della ν in prossimità delle onde d'urto introducono una condizione entropica che riduce le oscillazioni numeriche e determina un comportamento corretto delle variabili termofluidodinamiche attraverso l'onda. Per la simulazione di flussi subsonici stazionari si può comunque porre $\varepsilon^{(2)} = 0$.

Il fattore di scala R , così come è dato dalla (II.21), è inadeguato a delle simulazioni di flussi viscosi. Le griglie utilizzate in questi casi hanno dei *cell aspect ratio* $O(10^3)$ e la (II.21) introdurrebbe una scarsa viscosità artificiale lungo una delle coordinate computazionali che non riesce a smorzare le alte frequenze dell'errore. E' necessario quindi adottare delle formule anisotrope per i fattori di scala [30, 19]

$$R_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left[(\bar{\lambda}_\xi)_{i,j} + (\bar{\lambda}_\xi)_{i+1,j} \right] \quad (\text{II.26})$$

$$R_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \left[(\bar{\lambda}_\eta)_{i,j} + (\bar{\lambda}_\eta)_{i,j+1} \right] \quad (\text{II.27})$$

in cui $\bar{\lambda}_\xi$ e $\bar{\lambda}_\eta$ sono funzioni del rapporto $r = \lambda_\eta/\lambda_\xi$ secondo le

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_\xi)_{i,j} &= \phi_{i,j}(r) (\lambda_\xi)_{i,j} \\ \phi_{i,j}(r) &= 1 + r_{i,j}^{2/3} \\ (\bar{\lambda}_\eta)_{i,j} &= \phi_{i,j} \left(\frac{1}{r} \right) (\lambda_\eta)_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

I fattori di scala dati dalle (II.26), (II.27) si riducono a quello dato dalla (II.21), adeguato per simulazioni non viscosi, quando $r \sim 1$.

II.2.2 Flussi convettivi viscosi

Dalle (II.8), (II.9) l'operazione di discretizzazione della parte diffusiva del flusso di \mathbf{W} attraverso le pareti della cella $\Omega_{i,j}$ si scrive

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V \mathbf{W}_{i,j} &= \sum_{k=1}^4 \vec{\mathbf{H}}_V \Big|_{\ell_k} \cdot \vec{n}_{\ell_k} = \\ &= \left(\widehat{\mathbf{F}}_V \right)_{i+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{F}}_V \right)_{i-1/2} + \left(\widehat{\mathbf{G}}_V \right)_{j+1/2} - \left(\widehat{\mathbf{G}}_V \right)_{j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

con

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{F}}_V \right)_{i+1/2} &= \\ &\left(\begin{array}{c} 0 \\ (\tau_{xx})_{i+1/2,j} \text{NXJ}_{i+1/2,j} + (\tau_{xy})_{i+1/2,j} \text{NYJ}_{i+1/2,j} \\ (\tau_{yx})_{i+1/2,j} \text{NXJ}_{i+1/2,j} + (\tau_{yy})_{i+1/2,j} \text{NYJ}_{i+1/2,j} \\ (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x)_{i+1/2,j} \text{NXJ}_{i+1/2,j} + (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_x)_{i+1/2,j} \text{NYJ}_{i+1/2,j} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{G}}_V \right)_{j+1/2} &= \\ &\left(\begin{array}{c} 0 \\ (\tau_{xx})_{i,j+1/2} \text{NXI}_{i,j+1/2} + (\tau_{xy})_{i,j+1/2} \text{NYI}_{i,j+1/2} \\ (\tau_{yx})_{i,j+1/2} \text{NXI}_{i,j+1/2} + (\tau_{yy})_{i,j+1/2} \text{NYI}_{i,j+1/2} \\ (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x)_{i,j+1/2} \text{NXI}_{i,j+1/2} + (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_x)_{i,j+1/2} \text{NYI}_{i,j+1/2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Nelle (II.30)-(II.31) le componenti del tensore degli sforzi dissipativi e del vettore flusso termico sono proporzionali a delle derivate delle variabili dipendenti (cfr. (I.8)-(I.9)). Esse devono essere valutate sulle facce di $\Omega_{i,j}$ in termini dei valori puntuali $\mathbf{W}_{i,j}$ (si suppone che essi coincidano con i valori mediati sul volume della cella cioè con le incognite). Seguendo Martinelli [19], i gradienti vengono calcolati applicando i Teoremi di Gauss. Data una funzione f ed una regione Ω^g nella quale si vuole il gradiente $\vec{\nabla} f$, si può scrivere

$$\int_{\Omega^g} \vec{\nabla} f \, d\Omega^g = \oint_{\partial\Omega^g} \vec{n} f \, ds \quad (\text{II.32})$$

II.2 Discretizzazione del modello matematico

dove \vec{n} è il versore unitario normale alla frontiera $\partial\Omega^g$. In un sistema di coordinate cartesiane di \mathbb{R}^2 si ha

$$\int_{\Omega^g} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy = \oint_{\partial\Omega^g} \begin{pmatrix} f dy \\ -f dx \end{pmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Si consideri la (II.30), in cui per il calcolo, ad esempio, di $(\tau_{xy})_{i+1/2,j}$ sono richieste le derivate $(\partial u/\partial y)_{i+1/2,j}$, $(\partial v/\partial x)_{i+1/2,j}$. In base alla fig. II.3, si sceglie come dominio di integrazione la regione $\Omega_{i+1/2,j}^g$ individuata dai punti BECF e si discretizza l'integrale (II.33) con la formula dei trapezi ottenendo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} \mathcal{V}_{i+1/2,j}^g = \frac{1}{2} [(f_E + f_B)(y_E - y_B) + \quad (\text{II.34})$$

$$(f_C + f_E)(y_C - y_E) + (f_F + f_C)(y_F - y_C) + (f_B + f_F)(y_B - y_F)]$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} \mathcal{V}_{i+1/2,j}^g = -\frac{1}{2} [(f_E + f_B)(x_E - x_B) + \quad (\text{II.35})$$

$$(f_C + f_E)(x_C - x_E) + (f_F + f_C)(x_F - x_C) + (f_B + f_F)(x_B - x_F)]$$

Le derivate scritte sopra, associate al centroide dell'interfaccia $(\xi + 1, \eta)$ (nella numerazione nodale), sono quantità mediate sul volume di $\Omega_{\xi+1,\eta}^g$. Nelle (II.34), (II.35) è necessario calcolare le coordinate del tipo $\vec{x}_E = (x_E, y_E)$, $\vec{x}_F = (x_F, y_F)$ dei centroidi delle celle che condividono l'interfaccia considerata, ad esempio dall'intersezione delle diagonali. Inoltre bisogna stimare i valori del tipo f_B , f_C , ad esempio

$$f_B = \frac{1}{4} (f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1} + f_{i,j} + f_{i+1,j}) . \quad (\text{II.36})$$

Infine il volume $\mathcal{V}_{\xi+1,\eta+1/2}^g$ si ottiene calcolando il modulo del prodotto vettoriale dei vettori che congiungono le coppie di vertici opposti, (B,C) (F,E) in figura

II.3. Si ha

$$\mathcal{V}_{\xi+1, \eta+1/2}^g = \frac{1}{2} |(\vec{x}_C - \vec{x}_B) \times (\vec{x}_E - \vec{x}_F)| \quad (\text{II.37})$$

II.3 Condizioni al contorno

Per chiudere il sistema di equazioni algebriche associate allo schema numerico utilizzato è necessario valutare i flussi numerici in corrispondenza delle facce di tutte le celle, comprese quelle che vengono a trovarsi sul contorno $\partial\Omega$ del dominio di integrazione. In una griglia *multiblock* è inoltre necessario determinare le corrette condizioni alle interfacce fra i blocchi, per garantire la conservatività dello schema.

I flussi numerici su $\partial\Omega$ non possono essere calcolati secondo le formule dello schema centrato proposto per le celle più interne: alcune delle incognite risulterebbero non definite, essendo associate agli indici di celle esterne al dominio computazionale (le extracelle di fig. II.2). Se si esclude il caso dei problemi di valori iniziali con soluzioni periodiche nello spazio, per rimediare a questa mancanza di informazioni si utilizza una procedura di estrapolazione dall'interno. Comunque, come mostrato da parecchi autori (ad esempio [11]), una inopportuna estrapolazione rischia di non tener conto né del carattere matematico delle equazioni né dei fenomeni fisici che si verificano in prossimità del contorno.

Una impostazione suggerita da alcune delle più recenti pubblicazioni sull'argomento è discussa in De Marco [6], dove viene richiamato il problema teorico della chiusura delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

II.3 Condizioni al contorno

Problema ben posto (Sì se non specificato)	Eulero	Navier-Stokes	
		Condizioni euleriane	Condizioni viscose
–	\vec{V}, T	\vec{V}, T	–
nessuna prova per NS	\vec{V}, ρ	\vec{V}, ρ	$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0$
numericamente instabile per NS	$u - 2c/(\gamma - 1), v,$ s (entropia)	$u - 2c/(\gamma - 1), v,$ s (entropia)	$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0$
nessuna prova per E e NS	$\mathbf{\Lambda}_I \cdot \mathbf{L}_c \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$	$\mathbf{\Lambda}_I \cdot \mathbf{L}_c \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0$

Tabella II.1: Condizioni al contorno fisiche per le equazioni di Eulero (E) e di Navier-Stokes (NS) bidimensionali ($d = 2$). Caso di una parete di *inflow* subsonico con $\vec{n} \equiv \vec{i}$.

II.3.1 Scelta delle condizioni al contorno

Un insieme *compatibile* di condizioni al contorno [6] non necessariamente assicura la buona posizione di un problema, cioè una soluzione stabile ed unica di un problema di valori iniziali ed al contorno associato alle equazioni di Navier-Stokes (e/o di Eulero) non è garantita. Nelle tabelle II.1 e II.2, in cui le quantità che compaiono sono quelle imposte sul contorno, vengono riportati alcuni dei risultati teorici [10, 6] che assicurano la buona posizione di un problema.

Nel caso di una parete di *inflow* subsonico, ad esempio, per le equazioni di Eulero si hanno 4 possibilità di scelta di un insieme compatibile di condizioni al contorno. Per una parete di *outflow* si può invece specificare la pressione.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno sui termini viscosi, esse devono

II. IL CODICE FLOSIM

Problema ben posto (Sì se non specificato)	Eulero	Navier-Stokes	
		Condizioni euleriane	Condizioni viscose
<i>non reflecting outflow</i>	$p \text{ ad } x = \infty$	$p \text{ ad } x = \infty$	$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$
<i>reflecting outflow</i>	$p = p_\infty$	$p = p_\infty$	$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$
parete isoterma, <i>no-slip</i> per NS		$\vec{V} = 0, \quad T = T_w$	
parete adiabatica, <i>no-slip</i> per NS		$\vec{V} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$	

Tabella II.2: Condizioni al contorno fisiche per le equazioni di Eulero (E) e di Navier-Stokes (NS) bidimensionali ($d = 2$). Caso di una parete di *outflow* subsonico e di una parete solida impermeabile con $\vec{n} \equiv \vec{v}$.

essere assegnate in termini di dati sia interni che esterni al dominio computazionale. In molte circostanze, data la mancanza di informazioni esatte, si possono utilizzare dei dati estrapolati dall'interno. Comunque queste condizioni addizionali rispetto al caso euleriano, se non correttamente imposte, possono avere un effetto notevole sulla soluzione finale, per esempio uno strato limite troppo spesso in prossimità di una parete solida.

Se però i contorni non materiali del dominio di calcolo sono situati in regioni dove gli effetti viscosi sono trascurabili, allora si possono anche ignorare le condizioni al contorno viscose. In tali casi ci si serve dei risultati di un'analisi localmente unidimensionale delle relazioni di compatibilità euleriane sulla frontiera.

II.4 Condizioni al contorno globali

Per condizioni al contorno globali si intendono quelle condizioni da imporre all'interfaccia fra i blocchi di un dominio computazionale. Le relazioni introdotte nei successivi sottoparagrafi fanno riferimento a due blocchi distinti: B_1 , B_2 . Le grandezze relative a ciascun blocco sono identificate da un indice numerato fra parentesi in alto a destra.

II.4.1 Flussi viscosi artificiali sul contorno esterno del dominio di calcolo

Per il calcolo dei flussi dissipativi artificiali sarebbero necessarie due file di extracelle. In pratica si impone la costanza delle derivate seconde delle grandezze fluidodinamiche annullando così il contributo del quarto ordine nello schema di JST. Con riferimento alle (II.18) e (II.19), nell'espressione del flusso artificiale

$\left(\widehat{\mathbf{F}}_A\right)_{r=1/2}$ si ha

$$\left(\widehat{\mathbf{F}}_A\right)_{1/2} = R_{1/2,s} \varepsilon_{1/2,s}^{(2)} \delta_r^+ \mathbf{W}_{0,s} \quad (\text{II.38})$$

con

$$\varepsilon_{1/2,s}^{(2)} = \min [0.5, \kappa^{(2)} \nu_{0,s}] \quad (\text{II.39})$$

$$\nu_{0,s} = \left| \frac{p_{-1,s} - 2p_{0,s} + p_{1,s}}{p_{-1,s} + 2p_{0,s} + p_{1,s}} \right| \quad (\text{II.40})$$

$$R_{1/2,s} = 2 \left[\text{IR}(\lambda_r)_{0,s} + \text{IS}(\lambda_s)_{0,s} \right] \quad (\text{II.41})$$

ed infine λ_r e λ_s date da espressioni simili alle (II.22) e (II.23).

II.4.2 Costruzione dei flussi numerici viscosi sulle frontiere interne

L'algoritmo di accoppiamento tra le facce interne dei blocchi deve soddisfare i seguenti requisiti:

- la procedura non deve modificare l'algoritmo *multistage* che opera con le celle interne al blocco,
- i flussi devono essere conservati sulle pareti interne,
- deve essere mantenuta una accuratezza al 2° ordine sulla faccia interna anche quando la griglia presenta *stretching* e *skewness* (fig. II.7),
- deve considerare i diversi tipi di accoppiamento possibili tra i blocchi.

Per soddisfare il primo requisito è necessario impiegare una fila di extracelle in cui vengono conservate tutte le informazioni provenienti dai blocchi adiacenti. La conservatività dei flussi è ottenuta definendo sulle pareti interne un valore unico per le variabili di stato $\mathbf{W} = [\rho, \rho \underline{V}, \rho E]^T$ e per l'entalpia totale H . In particolare dovrà essere

$$\frac{1}{2} \left(\mathbf{W}_{0,s}^{(1)} + \mathbf{W}_{1,s}^{(1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{W}_{0,s}^{(2)} + \mathbf{W}_{1,s}^{(2)} \right) \quad (\text{II.42})$$

Per la conservatività dei flussi è necessario che le derivate di \underline{V} e T in direzione normale alla parete assuma sull'interfaccia valore unico

$$\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{n}} \right)_{1/2,s}^{(1)} = \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{n}} \right)_{1/2,s}^{(2)} \quad (\text{II.43})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \underline{n}} \right)_{1/2,s}^{(1)} = \left(\frac{\partial T}{\partial \underline{n}} \right)_{1/2,s}^{(2)} \quad (\text{II.44})$$

II.4 Condizioni al contorno globali

ed in più, nei casi turbolenti, bisogna imporre l'uguaglianza dell'*eddy viscosity* all'interfaccia tra i blocchi

$$\frac{1}{2} \left(\mu_{0,s}^{(1)} + \mu_{1,s}^{(1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\mu_{0,s}^{(2)} + \mu_{1,s}^{(2)} \right) \quad (\text{II.45})$$

La conservatività dei flussi dissipativi artificiali richiederebbe, per la presenza della derivata terza, l'impiego di una seconda fila di extracelle ma una valida alternativa è quella di valutare separatamente i flussi sulle pareti interne impiegando valori provenienti direttamente da entrambi i blocchi, senza fare ricorso ad extracelle (eccetto che per lo *shock sensor*). In particolare si avrà

$$F_{1/2,s}^a = \left(\epsilon_{1/2,s}^{(2)} R_{1/2,s} \Delta^1 - \epsilon_{1/2,s}^{(4)} R_{1/2,s} \Delta^3 \right) \cdot \mathbf{W} \quad (\text{II.46})$$

con

$$\Delta^1 \mathbf{W} = \mathbf{W}_{0,s}^{(2)} - \mathbf{W}_{0,s}^{(1)} \quad (\text{II.47})$$

$$\Delta^3 \mathbf{W} = \left(\mathbf{W}_{-1,s}^{(2)} - 3\mathbf{W}_{0,s}^{(2)} + 3\mathbf{W}_{0,s}^{(1)} - \mathbf{W}_{-1,s}^{(1)} \right) \quad (\text{II.48})$$

$$\epsilon_{1/2,s}^{(2)} = \min \left(\frac{1}{2}, k^{(2)} \bar{\nu}_{1/2,s} \right) \quad , \quad \epsilon_{1/2,s}^{(4)} = \max \left(0, k^{(4)} - \alpha \bar{\nu}_{1/2,s} \right) \quad (\text{II.49})$$

in cui

$$\bar{\nu}_{1/2,s} = \max \left(\nu_{0,s}^{(1)}, \nu_{0,s}^{(2)} \right) \quad (\text{II.50})$$

e

$$\nu_{0,s}^{(1)} = \frac{|p_{1,s}^{(1)} - 2p_{0,s}^{(1)} + p_{-1,s}^{(1)}|}{|p_{1,s}^{(1)} + 2p_{0,s}^{(1)} + p_{-1,s}^{(1)}|} \quad (\text{II.51})$$

$$\nu_{0,s}^{(2)} = \frac{|p_{1,s}^{(2)} - 2p_{0,s}^{(2)} + p_{-1,s}^{(2)}|}{|p_{1,s}^{(2)} + 2p_{0,s}^{(2)} + p_{-1,s}^{(2)}|} \quad (\text{II.52})$$

e con

$$R_{1/2,s} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{0,s}^{(1)} + \lambda_{0,s}^{(2)} \right) \quad (\text{II.53})$$

La determinazione del valore assunto dalle variabili di stato nelle extracelle dipende dalle caratteristiche della griglia. I diversi casi sono:

1. parete con griglia 'C¹-continua,
2. parete con linee di griglia a derivata continua,
3. parete con griglia 'C⁰-continua,
4. parete con griglia parzialmente continua,

e sono illustrati in figura II.7. Nel caso di parete C¹-continua è sufficiente

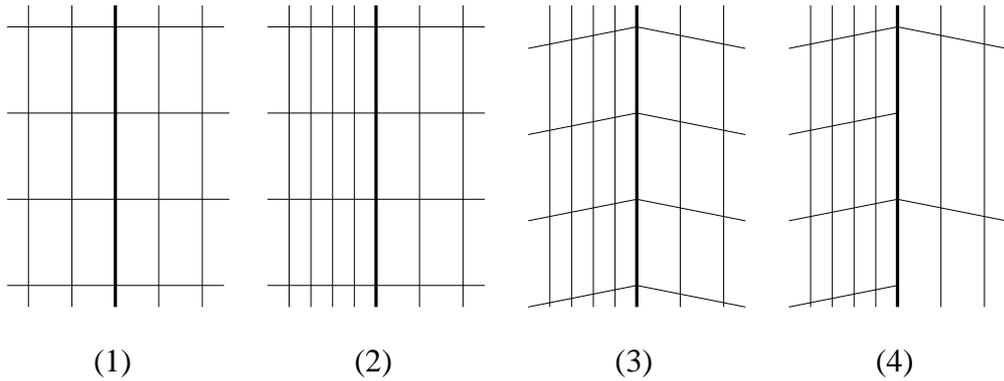


Figura II.7: Possibili interfaccie fra blocchi

effettuare una copia dei valori tra intracelle ed extracelle

$$\mathbf{W}_{1,s}^{(1)} = \mathbf{W}_{0,s}^{(2)} \quad (\text{II.54})$$

$$\mu_{t_{1,s}}^{(1)} = \mu_{t_{0,s}}^{(2)} \quad (\text{II.55})$$

Questo metodo a rigore andrebbe applicato solo nel caso di *mesh* uniforme all'interfaccia ma si dimostra valido più in generale anche negli altri casi di

griglia continua (non è applicabile quando la griglia è parzialmente continua se non con modifiche che tengano conto del diverso numero di celle che si affacciano sui due lati dell'interfaccia). Essendo stato l'unico metodo utilizzato in questo lavoro non si ritiene necessario l'approfondimento degli altri casi rimandando a [3] per ulteriori chiarimenti.

II.5 Condizioni al contorno locali

Condizioni al contorno locali sono quelle da imporre sia sulle facce esterne delle celle confinanti con il contorno esterno del dominio di integrazione sia su quelle interne confinanti con un'interfaccia di tipo periodico (par. II.5.4).

Nelle celle esterne al dominio di calcolo Ω le equazioni del moto non vengono risolte ed è necessario assegnare dei valori opportuni alle incognite affinché su $\partial\Omega$ risulti assegnato un numero corretto di condizioni. Noti i valori delle variabili di stato è possibile costruire sulle facce delle celle appartenenti alla frontiera almeno i flussi convettivi ed i flussi diffusivi previsti dallo schema centrato. Sui contorni artificiali gli sforzi viscosi dissipativi ed i flussi termici vengono inoltre ricavati dall'interno con formule di estrapolazione di ordine zero o di ordine uno.

Le formule che seguiranno saranno scritte in base alle notazioni introdotte nel paragrafo II.1. Dato un blocco computazionale, per ciascun *edge* elementare che giace sulla frontiera di Ω , a seconda della natura del lato, vengono specificati dei valori nelle extracelle come esposto nei paragrafi successivi.

II.5.1 Condizioni di parete solida

Sulle pareti solide è possibile assegnare due tipi di condizioni al contorno: le cosiddette *slip wall*, e *no-slip wall*. In particolare, nei blocchi in cui vengono risolte le equazioni di Navier Stokes viene assegnata la condizione di *no-slip wall* ed una condizione sulla temperatura, in quelli euleriani la sola condizione di *slip wall*.

La condizione che si impone nel caso di *slip wall* è che la componente normale della quantità di moto sulla parete sia nulla. Per una parete in generale curva, con normale locale \vec{r} diretta verso l'esterno, tale condizione si può imporre seguendo l'algoritmo:

1. si estrapola la quantità di moto nelle extracelle

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^* = 2\left(\rho\vec{V}\right)_{0,s} - \left(\rho\vec{V}\right)_{-1,s}$$

2. si calcola la quantità di moto sulla parete

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s}^* = \frac{\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^* + \left(\rho\vec{V}\right)_{0,s}}{2}$$

3. si sottrae alla quantità ottenuta la sua componente normale

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s} = \left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s}^* - \left\{ \left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s}^* \cdot \vec{r} \right\} \vec{r}$$

4. avendo determinato un vettore tangente alla parete si ricava infine il valore corrispondente nelle extracelle; infatti si ha

$$\frac{\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s} + \left(\rho\vec{V}\right)_{0,s}}{2} = \left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s}$$

da cui

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s} = 2\left(\rho\vec{V}\right)_{1/2,s} - \left(\rho\vec{V}\right)_{0,s}$$

Sviluppando ulteriormente si ottiene infine

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s} = \left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^* - \left\{ \left[\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^* + \left(\rho\vec{V}\right)_{0,s} \right] \cdot \vec{r} \right\} \vec{r} \quad (\text{II.56})$$

La pressione e l'entalpia totale vengono invece estrapolate dall'interno:

$$p_{1,s} = 2p_{0,s} - p_{-1,s} \quad , \quad H_{1,s} = 2H_{0,s} - H_{-1,s} \quad (\text{II.57})$$

La densità nelle extracelle non può essere assegnata ma deve essere ricavata dalle altre variabili di stato. Tenendo conto dell'espressione dell'entalpia totale si ha

$$\rho_{1,s} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p_{1,s} + \sqrt{\Delta} \right) / 2H_{1,s} \quad (\text{II.58})$$

con

$$\Delta = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p_{1,s} \right)^2 + 2\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^2 \quad (\text{II.59})$$

Una condizione simile alla *slip wall* è quella di simmetria. Se un *edge* elementare giace su un asse di simmetria del moto, per i vettori velocità è richiesto ugualmente che sulla parete siano allineati con l'asse. In tal caso, al posto delle estrapolazioni lineari, sarà sufficiente una copia dei valori nelle extracelle.

Quando si impone invece la condizione di *no-slip wall*, affinché la velocità sulla parete sia nulla, si ha

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s} = -\left(\rho\vec{V}\right)_{0,s} \quad (\text{II.60})$$

ed in tal modo il contributo al flusso convettivo sulla parete è dato solamente dai termini di pressione. Il valore della temperatura nelle extracelle è ottenuto

ponendo

$$T_{1,s} = T_{0,s} \quad (\text{II.61})$$

per pareti adiabatiche, e

$$T_{1,s} = 2T_w - T_{-1,s} \quad (\text{II.62})$$

per pareti con distribuzione di temperatura T_w assegnata. Il valore della pressione viene estrapolato linearmente dai valori assunti all'interno del dominio:

$$p_{1,s} = 2p_{0,s} - p_{-1,s} \quad (\text{II.63})$$

e la densità è ricavata dall'equazione di stato

$$\rho_{1,s} = \frac{p_{1,s}}{RT_{1,s}} \quad (\text{II.64})$$

Per un flusso, sia laminare che turbolento, l'eddy viscosity deve risultare nulla sulla parete. Per i modelli di turbolenza che necessitano dell'imposizione di tale condizione si impone il valore nel centro delle extracelle adiacenti alla parete deve essere imposto uguale ma di segno opposto a quello del centro delle intracelle corrispondenti:

$$\mu_{1,s} = -\mu_{0,s} \quad (\text{II.65})$$

Se la condizione di *no-slip* è quella generalizzata cioè se alla parete è assegnato un flusso di massa normale $G = (\rho\vec{V})_w$ si distingue il caso del soffiamento ($G < 0$) dal caso dell'aspirazione di fluido ($G > 0$).

Quando alla parete c'è iniezione di fluido dall'esterno è necessario porre una condizione per la temperatura di parete. Essa dipende dal contenuto entalpico

II.5 Condizioni al contorno locali

del fluido immesso (cfr. par. I.3). In alcuni casi si può assumere che la temperatura della parete T_w coincida con quella del fluido e può essere considerata un dato. Quindi si impone

$$\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s} = 2G\vec{r} - \left(\rho\vec{V}\right)_{0,s} \quad (\text{II.66})$$

si estrapola il valore della pressione, eq. (II.63), e della temperatura, eq. (II.62), nelle extracelle. Infine si ricava la ρ dall'equazione di stato, eq. (II.64), e l'entalpia totale dalla

$$H_{1,s} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{1,s}}{\rho_{1,s}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\rho\vec{V}\right)_{1,s}^2}{\rho_{1,s}^2} \quad (\text{II.67})$$

Il caso dell'aspirazione di flusso di massa uscente richiede invece, oltre alla (II.66), l'estrapolazione della pressione e dell'entalpia totale ed il calcolo della ρ in base alla (II.58).

II.5.2 Condizioni di *far-field*

Nello studio di flussi esterni, le condizioni numeriche da imporre sui contorni artificiali lontani da pareti solide sono chiamate condizioni di *far-field* e sono ricavate dalla Teoria delle Curve Caratteristiche (CC) [11]. Nelle regioni di *far-field* le equazioni del moto possono essere linearizzate trascurando i gradienti in direzione tangenziale al contorno $\partial\Omega$. In pratica si assume un flusso “quasi” unidimensionale. Per un profilo alare ciò è accettabile se il contorno è situato un numero di corde sufficientemente lontano dal corpo.

Se si considera il sistema di riferimento locale (r, s) si pone $u^r = \vec{V} \cdot \vec{r}$ ed $u^s = \vec{V} \cdot \vec{s}$. Nel caso rigorosamente unidimensionale, se $r \equiv x$, esistono delle

II. IL CODICE FLOSIM

variabili caratteristiche “ \mathcal{W} ”, associate agli autovalori “ λ ” della matrice jacobiana $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{W}$, dette *invarianti di Riemann* e costanti lungo le curve caratteristiche, di pendenza λ nel piano (x, t) . Nelle regioni di *far-field* si definiscono delle grandezze “ w ” e sono ancora chiamate invarianti di Riemann. Inoltre, nell’intorno di un punto appartenente a $\partial\Omega$ si distinguono tre curve caratteristiche $\Gamma_{1,2,3}$ associate agli autovalori

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u^r - c \\ \lambda_2 &= u^r + c \\ \lambda_3 &= u^r = \lambda_4\end{aligned}$$

Dato un flusso indisturbato, il numero di grandezze da assegnare nelle extracelle, localmente lungo la parete di *far-field*, è pari al numero di curve caratteristiche “entranti” ($\lambda_k < 0$) nel dominio di calcolo. In questo approccio è necessario assumere che il flusso sia localmente omoentropico.

Gli invarianti di Riemann sono dati dalle

$$\begin{aligned}w^{(1)} &= u^r + 2c/(\gamma - 1) && \text{costante lungo} && \Gamma_1 \\ w^{(2)} &= u^r - 2c/(\gamma - 1) && \text{costante lungo} && \Gamma_2 \\ w^{(3)} &= S = p/\rho^\gamma && \text{costante lungo} && \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 \\ w^{(4)} &= u^s && \text{costante lungo} && \Gamma_3 \equiv \Gamma_4\end{aligned}$$

e si può quindi assegnare alle grandezze $w^{(k)}$ costanti sulle caratteristiche entranti il valore assunto in condizioni asintotiche. Le $w^{(k)}$ associate alle caratteristiche uscenti ($\lambda_k > 0$) saranno estrapolate dall’interno. Si avrà quindi:

- Inflow subsonico. Le curve caratteristiche entranti sono $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$. Sarà quindi

$$w^{(1)} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{r}_{1/2,s} - 2c_\infty/(\gamma - 1)$$

$$w^{(3)} = p_\infty/\rho_\infty^\gamma$$

II.5 Condizioni al contorno locali

$$w^{(4)} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{s}_{1/2,s}$$

con $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$. L'unica curva caratteristica uscente è Γ_2 ($\lambda_2 > 0$) e sarà

$$w^{(2)} = \vec{V}_{0,s} \cdot \vec{r}_{1/2,s} - 2c_{0,s}/(\gamma - 1)$$

con $c_{0,s} = \sqrt{\gamma p_{0,s} / \rho_{0,s}}$.

- Outflow subsonico. L'unica curva caratteristica entrante è Γ_1 ed è

$$w^{(1)} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{r}_{1/2,s} - 2c_\infty/(\gamma - 1)$$

mentre le altre curve caratteristiche sono uscenti:

$$w^{(2)} = \vec{V}_{0,s} \cdot \vec{r}_{1/2,s} - 2c_{0,s}/(\gamma - 1)$$

$$w^{(3)} = p_{0,s} / \rho_{0,s}^\gamma$$

$$w^{(4)} = \vec{V}_{0,s} \cdot \vec{s}_{1/2,s}$$

- Inflow supersonico. Tutte le caratteristiche sono entranti. Gli invarianti di Riemann e quindi le variabili di stato nelle extracelle vengono poste tutte pari al valore assunto in condizioni asintotiche.
- Outflow supersonico. Tutte le caratteristiche sono uscenti. Gli invarianti di Riemann sono espressi tutti in termini di grandezze interne e le variabili di stato nelle extracelle vengono estrapolate dall'interno.

Passando ai valori da assegnare nelle extracelle, una volta ricostruiti i valori delle $w^{(k)}$, si avrà intanto

$$u_{1,s}^s = w^{(4)}$$

$$S_{1,s} = w^{(3)}$$

$$u_{1,s}^r = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2}$$

$$c_{1,s} = \frac{\gamma - 1}{4} (w^{(1)} - w^{(2)})$$

quindi il vettore velocità

$$\vec{V}_{1,s} = u_{1,s}^r \vec{r}_{1/2,s} + u_{1,s}^s \vec{s}_{1/2,s}$$

ed infine i valori delle variabili di stato

$$\rho_{1,s} = \left(\frac{c_{1,s}^2}{\gamma S_{1,s}} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$\left(\rho \vec{V} \right)_{1,s} = \rho_{1,s} \vec{V}_{1,s}$$

$$p_{1,s} = \frac{1}{\gamma} \rho_{1,s} c_{0,s}^2$$

$$H_{1,s} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{1,s}}{\rho_{1,s}} + \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_{1,s}^2 + (\rho v)_{1,s}^2}{\rho_{1,s}^2}$$

II.5.3 Condizione di *outflow* subsonico con pressione imposta

Una condizione classica per le equazioni di Navier-Stokes consiste nell'imporre il valore della pressione su una sezione di *outflow* subsonico. Il problema risulta ben posto essendo richiesta in questo caso un'unica condizione al contorno.

Se P è il valore imposto alla pressione di efflusso nelle extracelle si ha

$$p_{1,s} = 2P - p_{0,s} \quad (\text{II.68})$$

$$H_{1,s} = H_{0,s} = H_{1/2,s} \quad (\text{II.69})$$

$$\vec{V}_{1,s} = \frac{\left(\rho \vec{V} \right)_{0,s}}{\rho_{0,s}} = \vec{V}_{1/2,s} \quad (\text{II.70})$$

$$\rho_{1/2,s} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P / \left(H_{1/2,s} - \frac{1}{2} V_{1/2,s}^2 \right) \quad (\text{II.71})$$

ed infine

$$\rho_{1,s} = 2 \rho_{1/2,s} - \rho_{0,s} \quad (\text{II.72})$$

$$\left(\rho \vec{V} \right)_{1,s} = \rho_{1,s} \vec{V}_{1,s} \quad (\text{II.73})$$

II.5.4 Contorno di tipo periodico interno al dominio di calcolo

Un contorno interno di tipo periodico è un lato di un blocco a contatto con un altro lato dello stesso blocco (fig. II.8). In questo caso si stabilisce che la griglia sia ivi C^1 -continua e si adottano (con le opportune modifiche dovute agli indici delle celle) condizioni al contorno uguali a quelle di parete interna (par. II.4.2). L'unica differenza è che la condizione al contorno per parete periodica è una condizione locale e non globale.

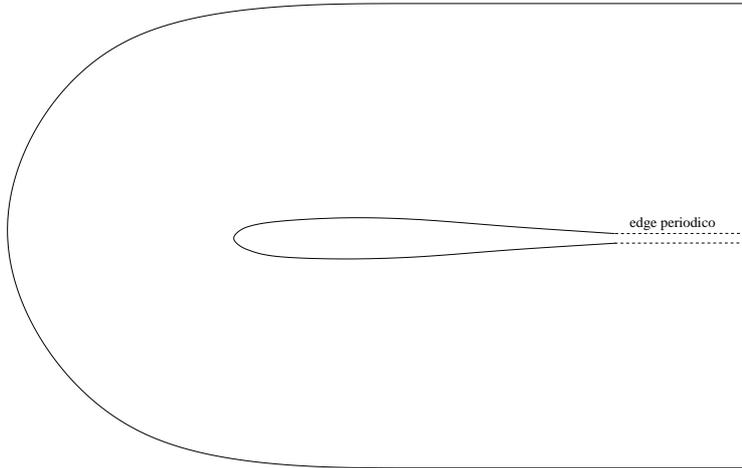


Figura II.8: Esempio di edge periodico

II.6 Integrazione nel tempo

Per problemi in cui le celle non cambiano nel tempo, il sistema di equazioni differenziali ordinarie associato alla (II.7) diventa

$$\frac{d\mathbf{W}_{i,j}}{dt} + \mathbf{R}(\mathbf{W}_{i,j}) = 0 \quad (\text{II.74})$$

con $i = 1, \dots, N_i$, $j = 1, \dots, N_j$ e dove $\mathbf{R}(\mathbf{W}_{i,j})$ è la funzione *residuo* definita dalla (cfr. par. II.3)

$$\mathbf{R}(\mathbf{W}_{i,j}) = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} [\mathcal{D}_C + \mathcal{D}_A + \mathcal{D}_V] \mathbf{W}_{i,j} \quad (\text{II.75})$$

Per l'avanzamento nel tempo della soluzione è possibile utilizzare una varietà di metodi di integrazione. I metodi del tipo *Runge-Kutta* (RK), cioè multistadio ad un sol passo, sono particolarmente adatti per la soluzione numerica del sistema (II.74) perché richiedono una limitata quantità di memoria destinata all'immagazzinamento dei dati e sono facili da codificare se combinati con delle tecniche di accelerazione della convergenza a griglie multiple. Per esempio, se si usa uno schema *standard*, di RK a quattro stadi, che ha una accuratezza del quarto ordine nel tempo, si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(0)} &= \mathbf{W}^n \\ \mathbf{W}^{(1)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}^{(0)} \\ \mathbf{W}^{(2)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}^{(1)} \\ \mathbf{W}^{(3)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \Delta t \mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{W}^{(4)} &= \mathbf{W}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} \left(\mathbf{R}^{(0)} + 2 \mathbf{R}^{(1)} + 2 \mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{R}^{(3)} \right) \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}^{(4)} \end{aligned}$$

dove i pedici $(\cdot)_{i,j}$ sono stati omessi per comodità e gli apici $(\cdot)^n$, $(\cdot)^{n+1}$ si riferiscono, rispettivamente, al livello di tempo attuale, $t_n = n\Delta t$, ed al livello di tempo successivo, $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$. Se interessa la simulazione di un flusso stazionario si può ancora considerare la soluzione numerica delle equazioni *time dependent*. In un approccio cosiddetto *time marching* un problema fluidodinamico stazionario si formula come un problema *pseudo*-stazionario in cui il tempo viene considerato come una coordinata di evoluzione. In tal modo una strategia *time marching* equivale ad un processo iterativo la cui convergenza corrisponde all'esistenza di uno stato stazionario. Del resto, l'impiego di metodi iterativi è inevitabile nella soluzione di problemi non lineari come quelli retti dalle equazioni di Navier-Stokes. Gli schemi del tipo RK hanno il pregio ulteriore di poter essere convenientemente progettati per l'ottenimento di una soluzione stazionaria. In tal caso l'accuratezza temporale non è significativa e questo permette di definire delle classi di schemi con buone proprietà di stabilità e di smorzamento dell'errore numerico, adatti per processi risolutivi ad alta velocità di convergenza. Ad esempio Jameson et al. [12] e Jameson [13] propongono una famiglia di schemi ad m stadi del tipo [29]

$$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{W}^n \quad (\text{II.76})$$

$$\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \mathbf{R}^{(0)} \quad (\text{II.77})$$

...

$$\mathbf{W}^{(m)} = \mathbf{W}^{(0)} - \alpha_m \Delta t \mathbf{R}^{(m-1)} \quad (\text{II.78})$$

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^{(m)} \quad (\text{II.79})$$

in cui il residuo al $(k + 1)$ -mo stadio è dato dalla

$$\mathbf{R}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ \sum_{r=0}^k \beta_{kr} \mathcal{D}_C \mathbf{W}^{(r)} + \sum_{r=0}^k \gamma_{kr} \mathcal{D}_A \mathbf{W}^{(r)} + \sum_{r=0}^k \delta_{kr} \mathcal{D}_V \mathbf{W}^{(r)} \right\} \quad (\text{II.80})$$

e dove i coefficienti di peso β_{kr} , γ_{kr} e δ_{kr} devono soddisfare la condizione di consistenza

$$\sum \beta_{kr} = 1 \quad \sum \gamma_{kr} = 1 \quad \sum \delta_{kr} = 1$$

Per definire lo schema devono essere assegnati, infine, i parametri α_k , con $k = 1, \dots, m$, ed i pesi β_{kr} , γ_{kr} e δ_{kr} . In Swanson e Turkel [30] viene svolta una discussione sui criteri di scelta di questi coefficienti. Gli schemi definiti dalla (II.80) sono chiamati *schemi* (m, n) : m si riferisce al numero di stadi ed n costituisce il numero di valutazioni dei contributi dissipativi artificiali. Swanson e Radespiel [29] hanno utilizzato con buoni risultati per le equazioni di Navier-Stokes uno schema $(5, 3)$ con dei coefficienti di peso

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \gamma_{00} = 1 \\ & & & & & & \gamma_{10} = 1 & \gamma_{11} = 0 \\ & & & & & & \gamma_{20} = \Gamma_3 & \gamma_{21} = 0 & \gamma_{22} = \bar{\gamma}_3 \\ & & & & & & \gamma_{30} = \Gamma_3 & \gamma_{31} = 0 & \gamma_{32} = \bar{\gamma}_3 & \gamma_{33} = 0 \\ \gamma_{40} = \Gamma_3 \Gamma_5 & \gamma_{41} = 0 & \gamma_{42} = \bar{\gamma}_3 \Gamma_5 & \gamma_{43} = 0 & \gamma_{44} = \bar{\gamma}_5 & & & & & \end{array} \quad (\text{II.81})$$

dove $\Gamma_3 = (1 - \bar{\gamma}_3)$, $\Gamma_5 = (1 - \bar{\gamma}_5)$, $\bar{\gamma}_3 = 0.56$ e $\bar{\gamma}_5 = 0.44$. Una riduzione del lavoro computazionale, senza un deterioramento delle prestazioni dello schema di avanzamento nel tempo, è stata ottenuta definendo il residuo al $(k + 1)$ -mo stadio come

$$\mathbf{R}^{(k)} = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left\{ \mathcal{D}_C \mathbf{W}^{(k)} + \sum_{r=0}^k \gamma_{kr} \mathcal{D}_A \mathbf{W}^{(r)} + \mathcal{D}_V \mathbf{W}^{(k)} \right\} \quad (\text{II.82})$$

cioè valutando i termini convettivi ed i termini viscosi (fisici) solo al primo stadio. La valutazione dei termini viscosi artificiali solo su certi stadi ed il

II.7 Tecniche di accelerazione della convergenza

filtraggio di queste quantità con i coefficienti di peso (II.81) riduce ulteriormente i tempi di calcolo ed, inoltre, allarga il margine di stabilità dello schema e fornisce delle proprietà di smorzamento dell'errore adeguate alle strategie di accelerazione della convergenza. I parametri α_k ottimali per uno schema a 4 stadi sono [13]

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad \alpha_4 = 1$$

mentre per uno schema a 5 stadi i parametri sono

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad \alpha_2 = \frac{1}{6} \quad \alpha_3 = \frac{3}{8} \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \quad \alpha_5 = 1$$

Per un'analisi di stabilità ed una discussione completa sulle proprietà degli schemi espliciti RK (m, n) si rimanda il lettore al rif. [30]. Si fa infine osservare che nei processi di risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes per via numerica è prassi utilizzare come parametro di convergenza il logaritmo in base 10 della media euclidea del residuo

$$\text{Log}_{10}(RMS) = \text{Log}_{10} \left[\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial t} \right)^2} \right] \quad (\text{II.83})$$

con N numero totale di celle.

II.7 Tecniche di accelerazione della convergenza

II.7.1 Local Time Stepping

Nella risoluzione di problemi stazionari i dettagli della soluzione transitoria ottenuta durante il processo di calcolo iterativo non sono interessanti e lo schema di avanzamento nel tempo può essere progettato per massimizzare il rateo di convergenza. Con uno schema esplicito il passo di tempo permesso, tale da

rientrare nei limiti di stabilità, può essere tanto piccolo da richiedere un gran numero di iterazioni per il raggiungimento dello stazionario. Ciò può essere evitato usando dei passi temporali diversi per ogni cella di calcolo. Essi sono calcolati in modo da essere più vicini possibile al limite locale di stabilità. Questo approccio può ricondursi alla soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{\alpha(x, y, t)} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad (\text{II.84})$$

che ammette una soluzione stazionaria coincidente con quella dell'equazione di partenza. Per problemi euleriani una stima conservativa del passo di tempo massimo $(\Delta t_E)_{i,j}$ consentito per una generica cella di area $\mathcal{V}_{i,j}$ è data dalla [19]

$$(\Delta t_E)_{i,j} = \text{CFL} \frac{\mathcal{V}_{i,j}}{(\lambda_\xi)_{i,j} + (\lambda_\eta)_{i,j}} \quad (\text{II.85})$$

dove λ_ξ e λ_η sono i raggi spettrali delle matrici jacobiane definiti dalle (II.22), (II.23) e CFL è il *numero di Courant*. Jameson [13] ha dimostrato che per un algoritmo RK ad m stadi accoppiato allo schema JST il CFL massimo assegnabile per ottenere una soluzione stabile è pari ad $m - 1$.

Per flussi viscosi una stima conservativa del passo di tempo risulta essere la seguente

$$(\Delta t_V)_{i,j} = \text{CFL} \frac{\mathcal{V}_{i,j}}{(\lambda_\xi)_{i,j} + (\lambda_\eta)_{i,j} + (\lambda'_\xi)_{i,j} + (\lambda'_\eta)_{i,j}} \quad (\text{II.86})$$

dove, omettendo i pedici $(\cdot)_{i,j}$, il termine aggiuntivo a denominatore si scrive come

$$\begin{aligned} (\lambda'_\xi) + (\lambda'_\eta) &= \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{\text{Re}_\infty} \frac{\mu}{\rho \mathcal{V}} \left\{ \frac{\gamma}{\text{Pr}} [(x_\eta^2 + y_\eta^2) + (x_\xi^2 + y_\xi^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

II.7.2 *Residual averaging*

Allo schema di avanzamento del tempo proposto può essere dato un carattere implicito attraverso una tecnica nota con il nome di *residual averaging* o *residual smoothing*. L'effetto pratico risulta in una estensione dei limiti di stabilità dell'algoritmo RK. Inoltre viene migliorata l'efficienza dei metodi di risoluzione a griglie multiple.

Al generico stadio, il residuo calcolato nella cella (i, j) viene sostituita da una grandezza “mediata” $\bar{\mathbf{R}}_{i,j}$. Il residuo mediato è legato a quello non mediato dalla formula alle differenze fattorizzata

$$(1 - \varepsilon_\xi \delta_\xi^2) (1 - \varepsilon_\eta \delta_\eta^2) \bar{\mathbf{R}}_{i,j} = \mathbf{R}_{i,j} \quad (\text{II.88})$$

dove $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta$ sono dei coefficienti. Per ottenere le incognite $\bar{\mathbf{R}}_{i,j}$ dalla (II.88) è necessario risolvere un sistema lineare di equazioni con matrice tridiagonale per ciascuna direzione coordinata. Per un problema modello lineare ed unidimensionale si dimostra [13] che, detto $\sigma^* = \text{CFL}_{\max}$ il limite di stabilità dello schema di partenza, il numero di Courant σ dello schema con residuo mediato deve essere tale che

$$\varepsilon_\xi \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} - 1 \right) \quad (\text{II.89})$$

In generale i coefficienti $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta$ vengono calcolati cella per cella con formule ottimizzate analoghe alle formule di *scaling* anisotrope (II.28). Infatti Martinelli [19] propone:

$$(\varepsilon_\xi)_{i,j} = \max \left\{ 0, \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \frac{\phi(r_{i,j})}{1 + r_{i,j}} - 1 \right) \right\} \quad (\text{II.90})$$

$$(\varepsilon_\eta)_{i,j} = \max \left\{ 0, \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \frac{\phi(1/r_{i,j})}{1 + 1/r_{i,j}} - 1 \right) \right\} \quad (\text{II.91})$$

con

$$r_{i,j} = \left(\frac{\lambda_\xi}{\lambda_\eta} \right)_{i,j} \quad \phi(r) = 1 + r^{2/3} \quad (\text{II.92})$$

e λ_ξ , λ_η dati dalle (II.22), (II.23).

II.7.3 *Multigrid*

Per la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes sono richiesti degli schemi di discretizzazione sufficientemente accurati e delle griglie molto fitte. L'alta accuratezza può essere ottenuta solo a spese dell'efficienza computazionale dell'algoritmo di risoluzione. Le tecniche *Multigrid* sono tipicamente adoperate per accelerare la convergenza verso soluzioni stazionarie e per incrementare l'efficienza dello schema numerico. Inizialmente sviluppati per la risoluzione di problemi lineari, i metodi a griglie multiple sono stati applicati con successo a problemi di fluidodinamica per la prima volta da Jameson per flussi non viscosi [13] e successivamente per flussi viscosi [19]. L'idea che è alla base delle strategie *multigrid* consiste nel trasferire alcuni dei compiti associati alla procedura di risoluzione ad una sequenza di griglie via via meno fitte. Fissata una griglia con il desiderato livello di accuratezza (griglia fine) si introducono successivamente griglie via via più grossolane ottenendole dalla griglia di partenza tramite eliminazione alternata dei nodi (griglie coarse). Avendo a disposizione allora, più livelli di griglia, si può pensare di demandare alla griglia più accurata l'abbattimento della parte ad alta frequenza dell'errore tra soluzione di n^{mo} tentativo e soluzione esatta, ed alle griglie più grossolane l'abbattimento della parte a bassa frequenza. In tal modo, essendo effettuato lo smorzamento dei modi a bassa frequenza su una griglia con un numero minore di punti, si

II.7 Tecniche di accelerazione della convergenza

ottiene una accelerazione della convergenza del processo iterativo. Come risultato si ottengono (i) un aumento dei passi temporali sulle griglie più grossolane senza violare i limiti di stabilità dello schema, (ii) una riduzione del numero di operazioni richieste e quindi (iii) una maggiore velocità di convergenza. Il metodo *multigrid* si può interpretare come una tecnica generale applicabile a diverse classi di problemi fluidodinamici se del loro carattere si tiene opportunamente conto nella costruzione degli operatori di trasferimento da un livello di griglia all'altro [10]. Una tecnica *multigrid* deve sempre smorzare in maniera ottima tutte le frequenze dello spettro dell'errore numerico associato allo schema di discretizzazione spaziale. Le alte frequenze sono generalmente abbattute con poche iterazioni su una data griglia grazie alle proprietà di smorzamento dell'errore caratteristiche dell'algoritmo di avanzamento nel tempo (l'RK nel caso dello schema JST). Le basse frequenze sono invece abbattute grazie alla strategia *multigrid* sulle griglie più grossolane.

La strategia adottata è del tipo *multiblock inside multigrid*; ciò vuol dire che il ciclo sui blocchi è interno al ciclo sui livelli di griglia. Di seguito è riportato lo schema del metodo FAS (*Full Approximation Storage*) cosiddetto a V . Siano L ed L_C rispettivamente il livello di griglia più accurato e più grossolano. Denotando con indici crescenti i livelli di griglia via via più accurati, essendo 1 l'indice della griglia più grossolana, un ciclo FAS a V è costituito, seguendo la procedura *standard* relativa al problema non lineare stazionario $R(W) = f(W)$ si ha:

1. PROCEDURE MG($\mathbf{W}_M, \mathbf{f}_M, M$)

II. IL CODICE FLOSIM

2. esecuzione di NPRE iterazioni al livello di griglia corrente M

3. IF ($M > 1$) THEN

- restrizione del residuo sulla griglia $M - 1$:

$$\mathbf{R}_{M-1} \leftarrow I_{M-1}^M \mathbf{R}_M \quad (\text{II.93})$$

- restrizione della soluzione sulla griglia $M - 1$:

$$\mathbf{W}_{M-1}^0 \leftarrow \tilde{I}_{M-1}^M \mathbf{W}_M \quad (\text{II.94})$$

- calcolo del termine noto:

$$\mathbf{f}_{M-1} \leftarrow \mathbf{R}_{M-1} (\mathbf{W}_{M-1}^0) - I_{M-1}^M \mathbf{R}_M \quad (\text{II.95})$$

- torna al punto 1 con $M = M - 1$

- esegue il calcolo ed il prolungamento della correzione:

$$\mathbf{W}_M \leftarrow \mathbf{W}_M + \tilde{I}_M^{M-1} (\mathbf{W}_{M-1} - \mathbf{W}_{M-1}^0) \quad (\text{II.96})$$

END IF

4. esecuzione di NPOST iterazioni al livello di griglia corrente M

L'operatore di prolungamento I_M^{M-1} adottato nel codice è di tipo bilineare: si assegna alla cella della griglia fine una \mathbf{W}_M data dalla media pesata delle \mathbf{W}_{M-1} delle quattro celle adiacenti appartenenti alla griglia coarse, con i coefficienti di peso rappresentati in figura II.9. La restrizione del residuo e della soluzione, indicati rispettivamente con gli operatori I_M^{M-1} ed \tilde{I}_M^{M-1} sono state ottenute, seguendo Jameson [13], tramite operazioni di somma

$$(I_M^{M-1} \mathbf{R}_{M-1})_{i,j} = (\mathbf{R}_M)_{2i,2j} + (\mathbf{R}_M)_{2i,2j-1} + (\mathbf{R}_M)_{2i-1,2j} + (\mathbf{R}_M)_{2i-1,2j-1} \quad (\text{II.97})$$

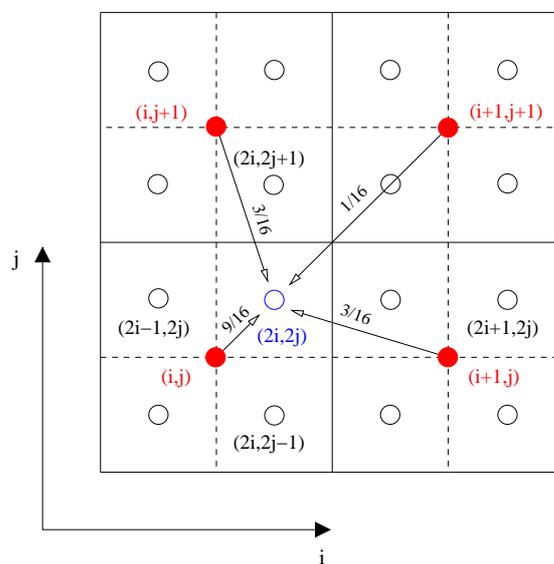


Figura II.9: Operatori di restrizione e prolungamento sul piano computazionale di una griglia strutturata bidimensionale

nel primo caso e di media pesata

$$\begin{aligned} \left(\tilde{I}_M^{M-1} \mathbf{W}_{M-1} \right)_{i,j} &= \frac{(\mathbf{W}_M)_{2i,2j} \Omega_{2i,2j} + (\mathbf{W}_M)_{2i,2j-1} \Omega_{2i,2j}}{\Omega_{i,j}} + \\ &+ \frac{(\mathbf{W}_M)_{2i-1,2j} \Omega_{2i,2j} + (\mathbf{W}_M)_{2i-1,2j-1} \Omega_{2i,2j}}{\Omega_{i,j}} \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

con $\Omega_{i,j}$ area della cella (i, j) nel secondo caso.

II.8 Aspetti numerici dei modelli di turbolenza

Le equazioni di tutti i modelli sono risolte con una formulazione ai volumi finiti, disaccoppiate dalle Navier-Stokes, con un metodo di integrazione nel tempo, esplicito di tipo Eulero.

La generica equazione ha la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\chi u_j) = S_p + S_d + D \quad (\text{II.99})$$

dove con χ si indica l'incognita che rappresenta, a seconda del modello, una delle variabili $(\rho k, \rho \omega, \rho \varepsilon, \rho \hat{\nu})$. I termini a secondo membro sono, al solito, la produzione, la distruzione e la diffusione.

Lo schema numerico utilizzato per il calcolo dei flussi convettivi è il classico schema *upwind* di Courant-Isaacson-Rees (CIR) [5].

Se con FH si indica la funzione flusso numerico, questa si esprime, sulla faccia est della generica cella (lato BC in fig. II.3), come

$$(FH)_{i+1/2} = 0.5(f_{i+1} + f_i) - 0.5d_{i+1/2} \quad (\text{II.100})$$

II.8 Aspetti numerici dei modelli di turbolenza

dove $f_i = Q_i \chi_i$ con Q_i velocità di convezione, data dalla (II.17).

Il termine $d_{i+1/2}$ è il cosiddetto flusso dissipativo, dato da

$$d_{i+1/2} = \text{sign}(Q_{i+1/2}) Q_{i+1/2} \delta^+ \chi_i \quad (\text{II.101})$$

con $\delta^+(\cdot) = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_{i-1}$.

Si è prevista la possibilità di attivare uno schema al II ordine ottenuto combinando il CIR con lo schema di Lax-Wendroff [17]. Seguendo Grasso, Meola [10], un flusso numerico *high order* si può sempre costruire come combinazione lineare di un flusso *low order* (FH^l) e di uno *high order* (FH^h), ovvero

$$\begin{aligned} (FH)_{i+1/2} &= (FH^l)_{i+1/2} + ((FH^h)_{i+1/2} - (FH^l)_{i+1/2}) = \\ &= (FH^l)_{i+1/2} + (FH^a)_{i+1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

dove $(FH^a)_{i+1/2}$ è il cosiddetto flusso antidiffusivo o artificiale. Il flusso antidiffusivo è stato espresso come

$$(FH^a)_{i+1/2} = 0.5(\text{sign}(Q_{i+1/2}) - \lambda Q_{i+1/2}) \left(\frac{df}{d\chi}\right)_{i+1/2} \delta^+ \chi_i \quad (\text{II.103})$$

dove $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

L'attivazione, all'interno del codice, dei flussi artificiali avviene tramite un fattore (*ordtf*), da fissare in *input*, che se posto uguale a 1 rende lo schema accurato al II ordine, ponendolo uguale a 0 si ottiene un puro *upwind* al I ordine.

I flussi diffusivi sono stati trattati con uno schema di derivazione centrale. Nell'implementazione, dovendo tener conto della forma delle griglie generate intorno ai profili, si è fatto uso di una formulazione in coordinate curvilinee o

II. IL CODICE FLOSIIM

“generalizzate”. Indicando con x, y le coordinate cartesiane e con ξ, η quelle curvilinee, si è operato il cambiamento di variabili

$$\xi = \xi(x, y) \quad (\text{II.104})$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (\text{II.105})$$

da cui si ottiene, per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{II.106})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{II.107})$$

dove $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ sono i fattori di scala della trasformazione (*metrics*), che si ottengono con il classico procedimento che coinvolge l’inversione della matrice Jacobiana, $J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$, della trasformazione. Senza dilungarsi sul procedimento, si riportano di seguito le relazioni che consentono di calcolare i fattori di scala.

$$\xi_x = Jy_\eta \quad \xi_y = J(-x_\eta) \quad \eta_x = J(-y_\xi) \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (\text{II.108})$$

L’interpretazione geometrica delle (II.108) permette un facile calcolo, infatti lo Jacobiano non è altro che l’inverso dell’area (o volume) della cella, mentre gli altri fattori sono le componenti delle normali alle facce della cella.

In definitiva, applicando quanto visto, si ottiene, per un termine diffusivo del tipo $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right)$, la discretizzazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right) &\equiv \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_x \mu \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_y \mu \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \\ &\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_x \mu \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_y \mu \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.109})$$

II.8 Aspetti numerici dei modelli di turbolenza

dove, ad esempio, il primo addendo a II membro si scrive

$$\begin{aligned} \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_x \mu \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= \xi_{x_i} \xi_{x_{i+1/2}} \mu_{i+1/2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)_{i+1/2} - \\ &\xi_{x_i} \xi_{x_{i-1/2}} \mu_{i-1/2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)_{i-1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

con

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)_{i+1/2} = \chi_{i+1} - \chi_i \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)_{i-1/2} = \chi_i - \chi_{i-1} \quad (\text{II.111})$$

mentre i valori delle variabili sulle facce sono calcolati come media aritmetica dei valori assunti nelle celle adiacenti.

L'adimensionalizzazione si è effettuata tramite le grandezze di riferimento

$$\hat{\nu}_r = \mu_\infty \quad k_r = V_\infty^2 \quad \omega_r = \frac{V_\infty^2}{\rho_\infty \mu_\infty} \quad \varepsilon_r = \frac{V_\infty^4}{\rho_\infty \mu_\infty} \quad (\text{II.112})$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, in generale si assegnano alle variabili i valori asintotici, ma per i modelli a due equazioni può essere utile a volte inizializzare le variabili k , ω , ε con dei valori che simulino i tipici profili di strato limite [16], onde aiutare la convergenza nella fase iniziale.

Così per i modelli $k - \omega$ si ha

$$k_{IC} = \max(k_\infty, -C_1 d^2 + C_2 d) \quad (\text{II.113})$$

$$\omega_{IC} = \max\left(-12444d + 0.54, \frac{C_\mu k_{IC}}{V_d}\right) \quad (\text{II.114})$$

dove d è la distanza dalla parete più vicina scalata per $Re/5.e + 6$, e $C_\mu = 1.0$

$$V_d = \max\left[\frac{100k_{IC}}{t_{max}}, 0.009\right] \quad t_{max} = -C_1 S_{max}^2 + C_2 S_{max} \quad (\text{II.115})$$

$$S_{max} = \frac{C_2}{2C_1} \quad C_1 = 45.8 \quad C_2 = 1.68 \quad (\text{II.116})$$

Capitolo III

LE POLARI DEL NACA 0012

In questo capitolo verranno presentati i primi risultati di simulazioni a basso numero di Mach e ad alta incidenza ottenuti con il codice FLOSIM.

Dopo aver descritto i principali parametri utilizzati per il calcolo ed i dati sperimentali scelti per avere un punto di riferimento si illustreranno i risultati numerici con confronti tra le diverse tipologie di simulazione e con i risultati ottenuti con il codice commerciale FLUENT.

III.1 Le griglie utilizzate

Al momento di sviluppare questo primo lavoro era disponibile una griglia a ‘C’ simmetrica per un profilo NACA 0012, costituita da 90112 celle, con un far-field¹ posizionato a 15 corde dal corpo ed una discretizzazione del profilo con 513 grid-points². Questa griglia rappresenta, almeno attualmente, un elevato livello di affinamento del dominio di calcolo e per tal motivo ci si riferirà ad essa con il nome di *super-fine*.

La *super-fine* è stata pensata per simulazioni transoniche a bassa incidenza

¹La distanza del far-field è importante perchè, come è stato dimostrato, influenza la stima del C_l

²Attualmente una griglia operativa discretizza il profilo con circa 300 grid-points

e per ottenere risultati di riferimento per griglie meno raffinate ma, in questo caso, si è rivelata molto utile per il suo elevato numero di celle che ha permesso di generare altre griglie senza dover ricorrere necessariamente ad un grid-generator. Infatti è bastato semplicemente sottrarre di volta in volta, secondo le diverse esigenze di simulazione, un opportuno numero di celle per ottenere griglie con diverse caratteristiche.

Resta comunque l'incognita dovuta alla simmetria. In condizioni di alta portanza la scia a valle del profilo è lontana da qualsiasi forma simmetrica (fig. III.1) ed è quindi lecito ipotizzare di poter trarre vantaggio dall'utilizzo di gri-

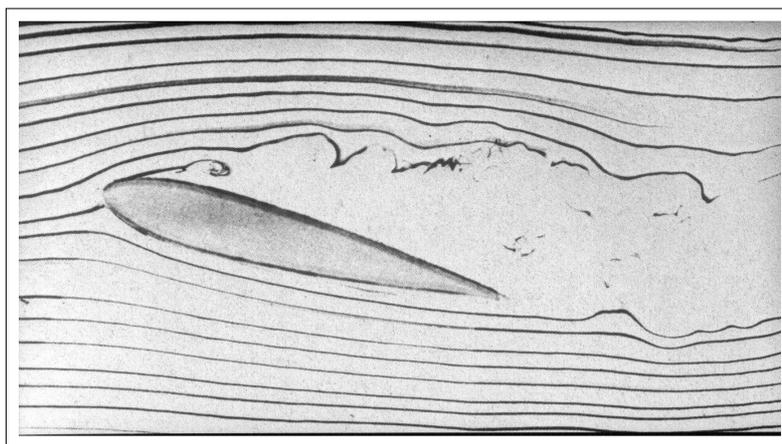


Figura III.1: Visualizzazione con filetti di fumo di un flusso fortemente separato

glie adattative non simmetriche che addensano molte celle proprio lungo la scia, dove potrebbe essere importante un buon affinamento per poter simulare bene un flusso turbolento. Ma, pur essendo la qualità della griglia un punto focale, la loro generazione rappresenta un altro tipo di problematica che andrebbe affrontato con le opportune competenze.

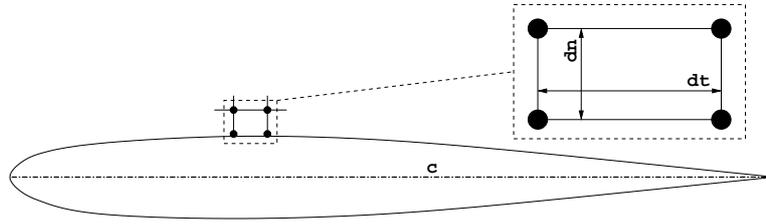


Figura III.2: Schematizzazione per la distanza normale e per l'aspect-ratio

Per questo motivo, ed anche perché si desiderava valutare l'effetto di alcune modifiche apportate ad una griglia base, si sono utilizzate delle griglie³ frutto di un lavoro di manipolazione della *super-fine* e che di seguito verranno presentate con una serie di immagini, utili a coglierne gli aspetti fondamentali, una tabella riassuntiva delle principali caratteristiche ed i diagrammi di due importanti parametri geometrici (fig. III.2): la distanza⁴ normale e l'aspect-ratio⁵ delle celle adiacenti al corpo in funzione della posizione lungo il corpo.

In particolare alla fine del paragrafo sono riportate due delle griglie adattative ottenute con la deformazione della scia della griglia *half super-fine* in modo da tracciare un plausibile andamento di scia senza alterare eccessivamente le caratteristiche della griglia simmetrica originaria, tenendo conto dell'angolo d'attacco, della necessità di non creare forti discontinuità in prossimità del bordo d'uscita e di mantenere inalterata la forma del far-field.

Nel paragrafo III.4.6 si troverà poi una ulteriore analisi post-simulazione della qualità delle griglie in relazione alla tipologia della stessa simulazione.

³Ciascuna griglia verrà etichettata con un nome che ne faciliterà i riferimenti

⁴Distanza adimensionalizzata rispetto alla corda (dn/c)

⁵Rapporto tra la dimensione tangenziale e quella normale della cella (dt/dn)

Griglia *super-fine*

grid points totali	705x129=90945
grid points sul corpo	512
grid points in direzione normale al corpo	129
grid points sulla scia	97
far-field	15 corde

Tabella III.1: Caratteristiche della griglia *super-fine*

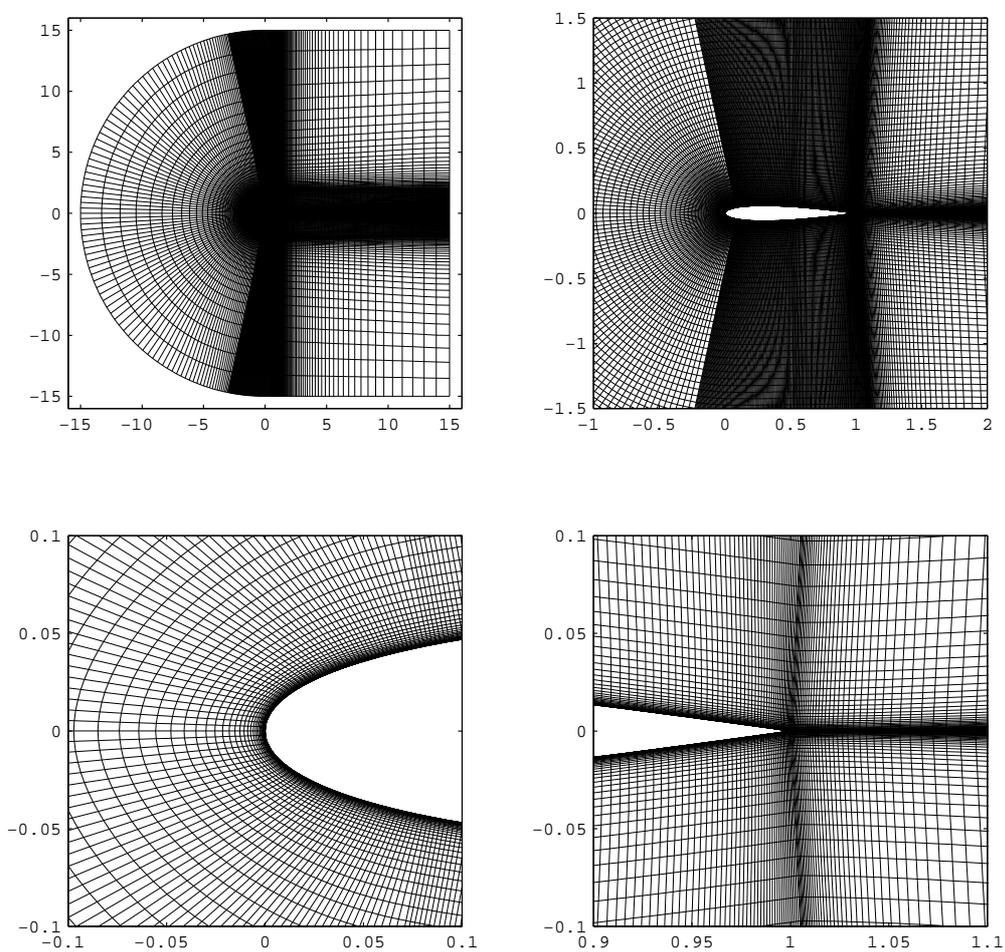


Figura III.3: Viste della griglia *super-fine*

III.1 Le griglie utilizzate

Griglia *fine*

grid points totali	353x65=22945
grid points sul corpo	256
grid points in direzione normale al corpo	65
grid points sulla scia	49
far-field	15 corde

Tabella III.2: Caratteristiche della griglia *fine*

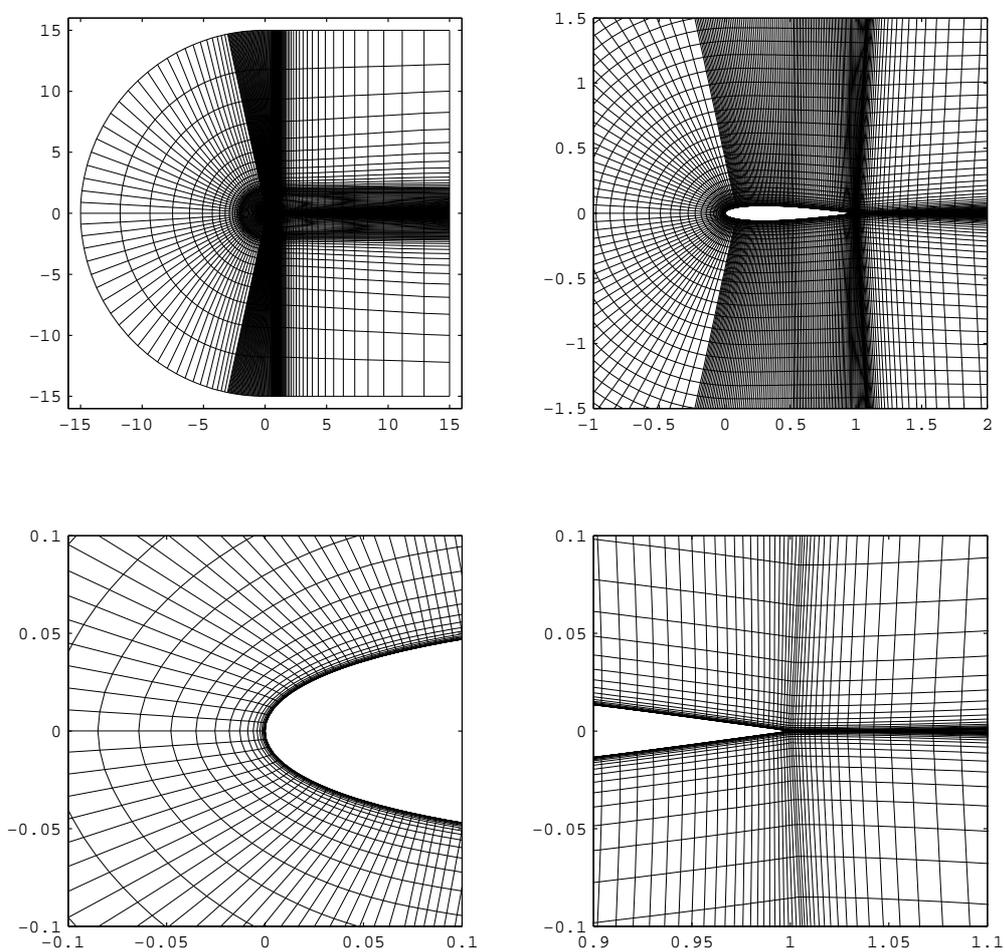


Figura III.4: Viste della griglia *fine*

Griglia *leading edge*

grid points totali	401x65=26065
grid points sul corpo	304
grid points in direzione normale al corpo	65
grid points sulla scia	49
far-field	15 corde

Tabella III.3: Caratteristiche della griglia *leading edge*

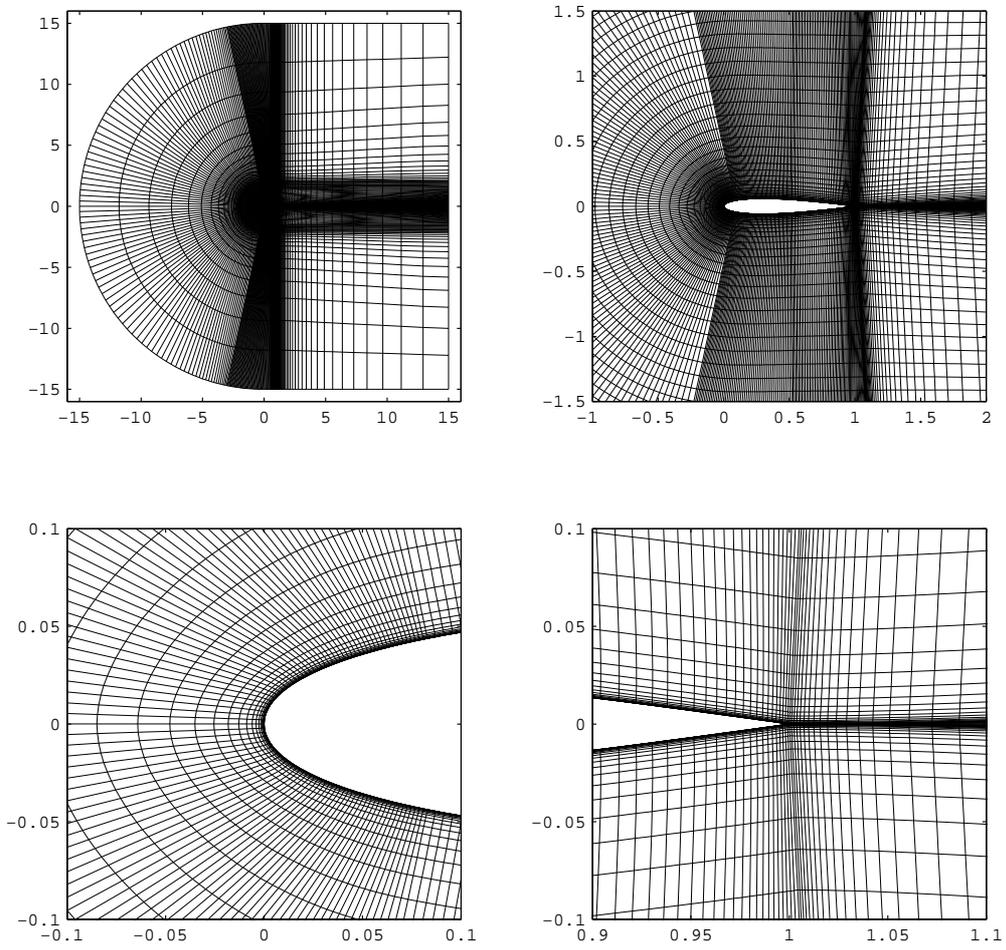


Figura III.5: Viste della griglia *leading edge*

Griglia *half super-fine*

grid points totali	705x65=45825
grid points sul corpo	512
grid points in direzione normale al corpo	65
grid points sulla scia	97
far-field	15 corde

Tabella III.4: Caratteristiche della griglia *half super-fine*

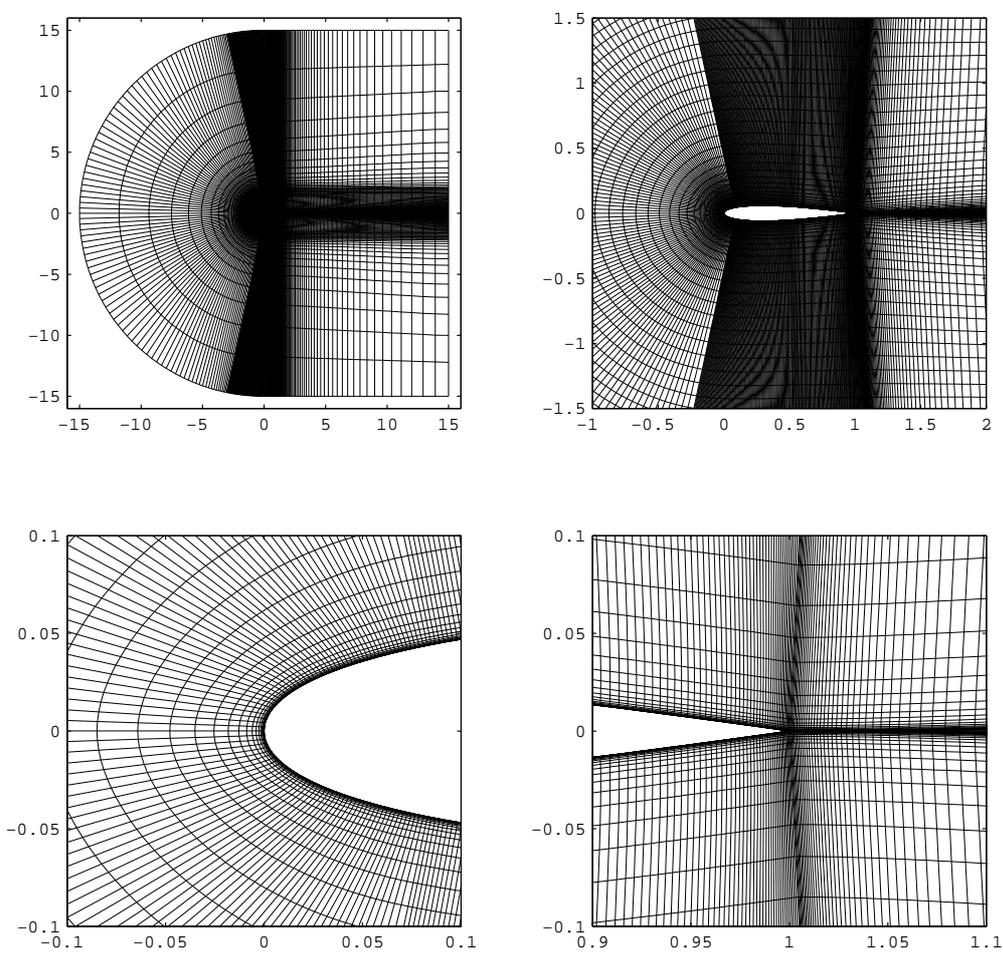


Figura III.6: Viste della griglia *half super-fine*

III. LE POLARI DEL NACA 0012

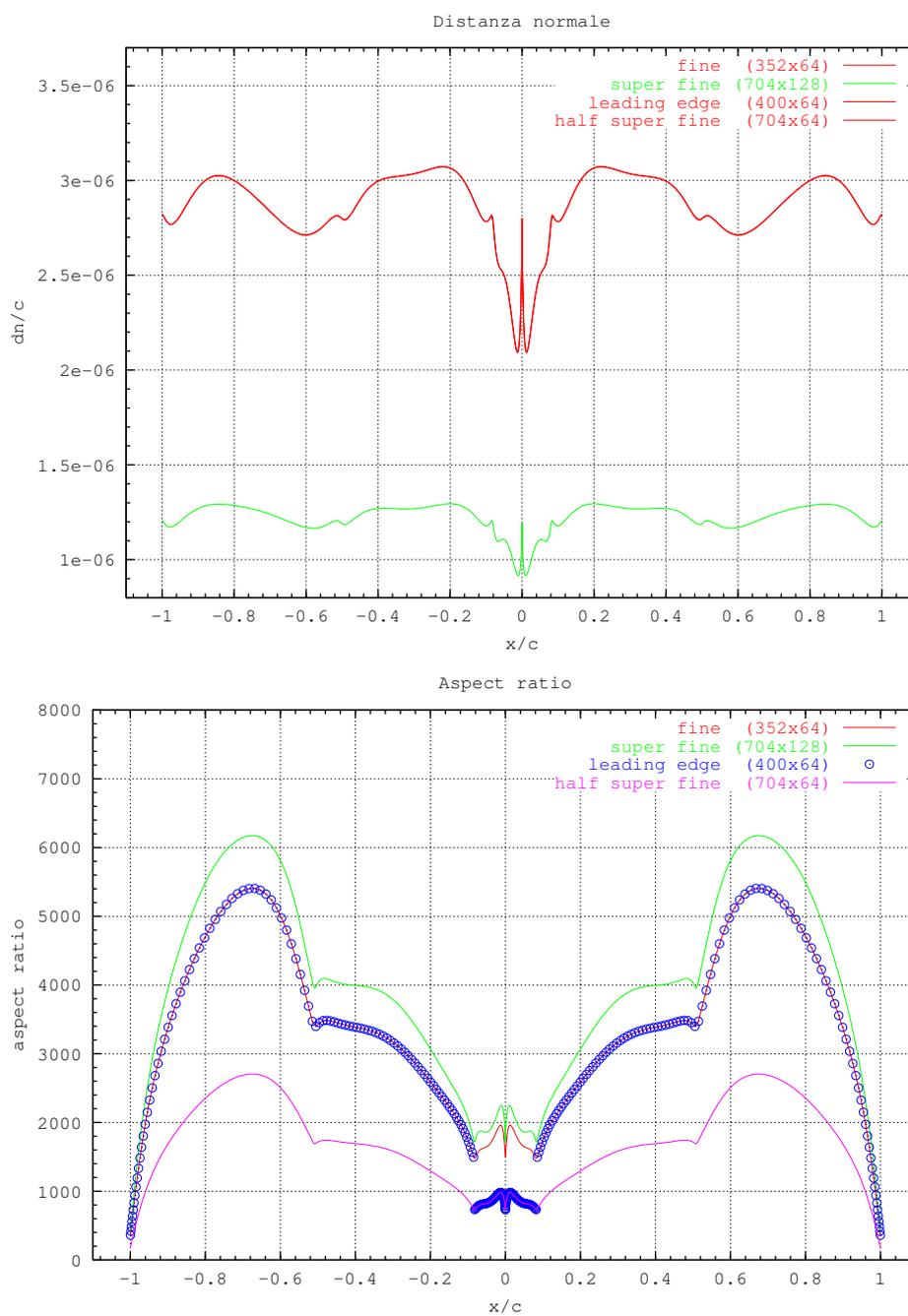


Figura III.7: Distanza normale ed aspect-ratio delle griglie

Griglie adattative

Le griglie adattative sono state ottenute deformando la scia della griglia *half super-fine* attraverso la seguente formula applicata solo ai grid-points posizionati a valle del bordo d'uscita del profilo

$$y_{adapt} = y + (x - x_{te}) \operatorname{tg}(\alpha) \frac{(y_{ff} - |y|)}{y_{ff}} \frac{x - x_{te}}{x_{ff} - x_{te}}$$

dove x, y sono le coordinate dei grid-points della griglia simmetrica, y_{adapt} è la nuova ordinata dei grid-points modificati, α è l'angolo d'attacco del profilo, x_{ff}, y_{ff} sono le coordinate (positive) del grid-point più distante dal bordo d'uscita del profilo ed x_{te} è l'ascissa del bordo d'uscita.⁶

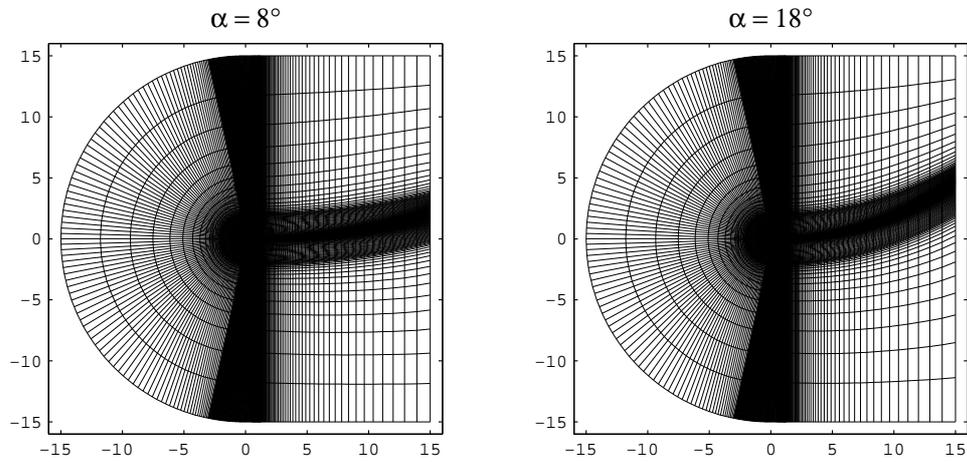


Figura III.8: Vista complessiva di griglie adattative

⁶In questo caso si ha: $(x_{ff}, y_{ff}) = (15, 15)$, $x_{te} = 1$.

III.2 Gli altri parametri del calcolo

La griglia rappresenta sicuramente uno degli input più importanti ma bisogna impostare molti altri parametri prima di poter avviare una simulazione con FLOSIM.

Vanno innanzitutto fissati i parametri termofluidodinamici attraverso i numeri caratteristici di Mach, Reynolds, Prandtl, Prandtl di turbolenza e γ , indicati in tabella III.5, che saranno uguali per tutti i casi riportati in questo capitolo (tranne che per il test-case della lastra piana discusso nel paragrafo III.4.9).

Mach	Reynolds	Prandtl	Prandtl_{turb.}	γ
0.15	9.0×10^6	0.72	0.9	1.4

Tabella III.5: Numeri caratteristici

A numeri di Reynolds così elevati si rende anche necessario l' accoppiamento di un modello di turbolenza alle equazioni RANS. Trattandosi delle prime prove si è cercato un compromesso tra il costo computazionale e la qualità delle soluzioni: un modello algebrico, pur essendo poco dispendioso computazionalmente, avrebbe potuto mostrarsi non adeguato a calcoli in alta portanza, mentre un modello a due equazioni, o addirittura uno non lineare, per quanto potenzialmente più robusto per la migliore accuratezza delle equazioni del trasporto, avrebbe richiesto lunghi tempi di elaborazione. La scelta è così ricaduta sul modello ad una equazione di Spalart-Allmaras che, tra l' altro, è molto apprezzato in letteratura per aver dimostrato di sapersi ben comportare in svariate situazioni. Comunque, per poter comprendere le capacità del mo-

III.2 Gli altri parametri di input

dello di Spalart-Allmaras, si è sentita l'esigenza di svolgere alcune prove con un modello a due equazioni ed in particolare si è utilizzato il modello $k - \omega$ SST per i buoni risultati ottenuti in altri lavori [9]. Le condizioni di corrente asintotica per i due modelli sono:

Spalart-Allmaras	
$\hat{\nu}_\infty$	1.341946
$k - \omega$ SST	
k_∞	9.0×10^{-9}
$(\mu/\mu_T)_\infty$	0.09

Tabella III.6: Condizioni asintotiche per i modelli di turbolenza utilizzati

I modelli di turbolenza però non sono capaci di calcolare il punto di transizione da flusso laminare a flusso turbolento ed hanno dunque bisogno che vengano assegnate le coordinate di due punti, uno sul dorso ed uno sul ventre del profilo. La scelta di tali punti deve essere strettamente legata alla fisica del problema in esame ed al tipo di prove sperimentali con le quali si desidera confrontarsi. Per quanto riguarda la transizione sul dorso si è preferito fissarla sempre allo 0.1% della corda perchè in condizioni di alta portanza il picco di espansione, posizionato immediatamente a valle del bordo d'attacco, è talmente alto da non consentire al flusso di conservare la laminarità e ciò, per il NACA 0012 in campo subsonico (fig. III.9), vale già ad incidenze medie (6-8 gradi).

Sulla base del principio secondo cui il punto di transizione sul dorso è imposto dal picco di espansione si sarebbe anche potuto spostarlo al variare dell'incidenza ma alcune prove effettuate hanno mostrato la sostanziale inutilità di tale

scelta.

Anche per la transizione sul ventre si è preferito non spostarla al variare dell'angolo d'attacco. L'idea seguita è stata quella di avere a qualsiasi incidenza la transizione sempre a valle del punto di ristagno anteriore e per ottenere ciò sul ventre è stata fissata al 7% della corda.⁷

Si vedrà al momento dell'analisi dei diagrammi del C_f come queste semplici scelte non abbiano causato incongruenze nell'andamento del C_f stesso.

Nel paragrafo III.4.9 si troveranno comunque alcuni risultati ottenuti in condizioni fully turbulent, senza fissare i punti di transizione.

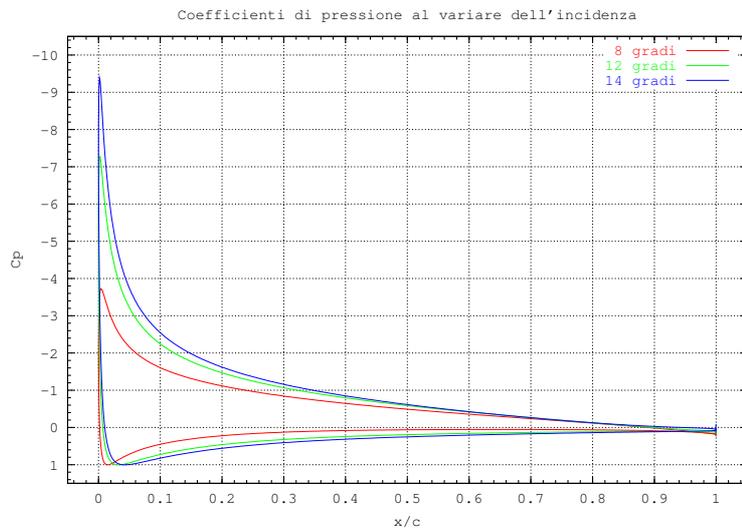


Figura III.9: Diagrammi del coefficiente di pressione per il profilo NACA 0012 ($M=0.15$, $Re=9.0E+6$)

Per lo schema numerico, che è stato basato su uno schema Runge-Kutta a tre stadi, le scelte più importanti sono relative ai numeri di Courant, alla viscosità

⁷Solo per le prove ad $\alpha=0$ le due transizioni sono state fissate al 5%

III.2 Gli altri parametri di input

artificiale, ai livelli di griglia ed al multigrid.

La scelta dei due numeri di Courant, CFL e CFL di turbolenza, è stata dettata dagli studi condotti in precedenza, in particolare dall'esperienza accumulata dagli altri utenti di FLOSIIM [9] e dai suggerimenti presenti in letteratura che hanno condotto ad utilizzare sempre:

CFL	CFL _{turb.} (Spalart-Allmaras)	CFL _{turb.} ($k - \omega$ SST)
1.4	2.0	1.2

Tabella III.7: Numeri Courant

Come si avrà modo di comprendere bisogna prestare molta attenzione al coefficiente di viscosità artificiale $\kappa^{(4)}$ perchè il suo valore può sostanzialmente alterare il numero di Reynolds effettivo con conseguenze per le soluzioni che verranno illustrate quando si valuteranno gli effetti di $\kappa^{(4)}=1.0$ e di $\kappa^{(4)}=0.5$. Il coefficiente $\kappa^{(2)}$ è stato invece azzerato perchè la sua funzione è quella di correggere le oscillazioni che si producono in prossimità degli urti che non sono presenti in questo studio condotto a bassi numeri di Mach.

Per i livelli di griglia si è sempre utilizzato il maggior numero di livelli possibile, compatibilmente con le caratteristiche delle griglie, senza avere mai problemi.

Griglia	Livelli di griglia
<i>fine</i>	3
<i>leading edge</i>	3
<i>half super-fine</i>	3
<i>super-fine</i>	4

Tabella III.8: Livelli di griglia

III. LE POLARI DEL NACA 0012

Degli acceleratori di convergenza disponibili si sono usati il multigrid ed il local time stepping. Il multigrid si è rivelato uno strumento molto delicato perchè quando è stato necessario abbassare il coefficiente $\kappa^{(4)}$ per ridurre la viscosità artificiale, al di sotto del valore 1.0 consigliato come limite inferiore di stabilità, non si è potuto utilizzarlo al pieno delle sue possibilità; in particolare si è dovuto aumentare il rapporto tra le Pre e Post iterazioni ed il numero di Coarse Grid Corrections. Sostanzialmente si è stati costretti a diminuirne l'effetto affinché si potesse avere uno schema stabile pur con una viscosità artificiale relativamente bassa.

	Pre Iterazioni	Coarse Grid Corrections	Post Iterazioni
$k^{(4)} = 1.0$	2	1	2
$k^{(4)} = 0.5$	5	1	5

Tabella III.9: Schemi del multigrid

Infine bisogna scegliere le condizioni al contorno. Sfruttando la figura III.10, in cui è rappresentata una tipica topologia di una griglia a 'C' monoblocco, si può leggere agevolmente la tabella III.10 che riassume, per ciascun edge, le condizioni al contorno utilizzate in queste prove.

edge	Boundary Condition
1	far-field
2	far-field
3	parete periodica
4	no-slip
5	parete periodica
6	far-field

Tabella III.10: Boundary Conditions

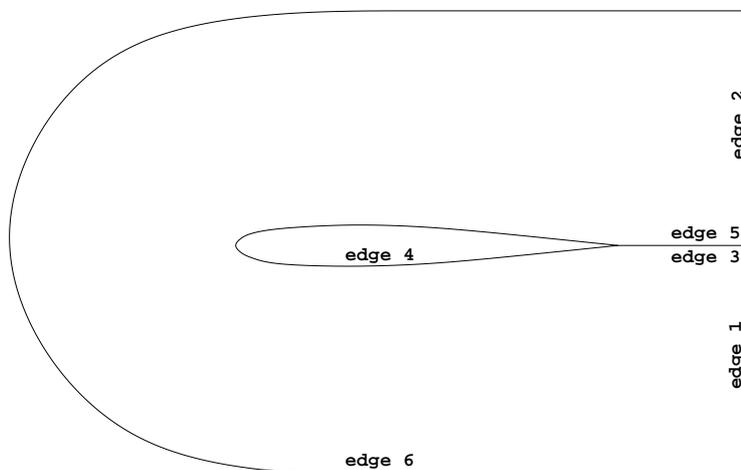


Figura III.10: Topologia di una griglia a 'C' monoblocco

III.3 I dati sperimentali

La più autorevole fonte di informazioni circa le prove in galleria per i profili NACA⁸ è costituita storicamente dai report della stessa Commissione Consulativa americana. I risultati di questi report sono ormai di pubblico dominio ed in particolare sono stati raccolti da Ira H. Abbott nel manuale “Theory of wing section” [1] che rappresenta un importante punto di riferimento per confrontare i risultati numerici con i dati sperimentali.

In questo capitolo si farà sempre riferimento ai risultati riportati nel manuale di Abbott. Le figure III.11 e III.12 riportano proprio le pagine relative al profilo NACA 0012 estratte dal Technical Note 2074 dell’ aprile 1950. In tabella sono invece riportati i valori numerici ricavabili da tali grafici.

α	C_l	C_d^*	C_m
0.0°	0.00	57	0.000
2.0°	0.22	60	0.000
4.0°	0.44	65	0.000
6.0°	0.66	70	0.000
8.0°	0.88	81	0.000
10.0°	1.09	92	0.000
12.0°	1.30	114	0.000
14.0°	1.48		0.000
15.0°	1.57		-0.001
16.0°	1.60		-0.050
17.0°	1.42		-0.075
18.0°	1.10		

Tabella III.11: Dati sperimentali NACA (* espresso in count)

⁸National Advisory Committee for Aeronautics

III.3 I dati sperimentali

Le prove sono state svolte in una delle gallerie del Langley Aeronautical Laboratory adatta a simulare flussi bidimensionali, ritenuta a basso livello di turbolenza e capace di operare anche a pressioni superiori alle 10 atmosfere. La portanza è stata misurata dall'integrazione della pressione rilevata sulle pareti superiore ed inferiore della camera di prova, la resistenza è stata invece ottenuta da misure effettuate nella scia a valle del profilo (tipicamente si utilizza un pettine di tubi di pitot) mentre per il momento di beccheggio si è usata una bilancia torsionale e secondo quanto riferito da Abbott questo tipo di misure assicura un elevato ordine di accuratezza. La galleria disponeva di una camera di prova con sezione larga 3 [ft] ed alta 7.5 [ft] . I modelli provati avevano un'apertura pari alla larghezza della camera di prova ed una corda di 2 [ft]. In particolare i test a cui si farà riferimento sono quelli effettuati su un modello trattato in maniera tale da essere ritenuto sufficientemente liscio⁹ da non stimolare artificialmente la transizione. Il numero di Mach utilizzato viene indicato come sempre inferiore a 0.17 mentre per il Reynolds si è scelto di confrontarsi con le prove effettuate a $Re=9.0E+6$.

⁹Il modello è stato ricoperto con composti di vetro e con sabbia di carborundo N 400.

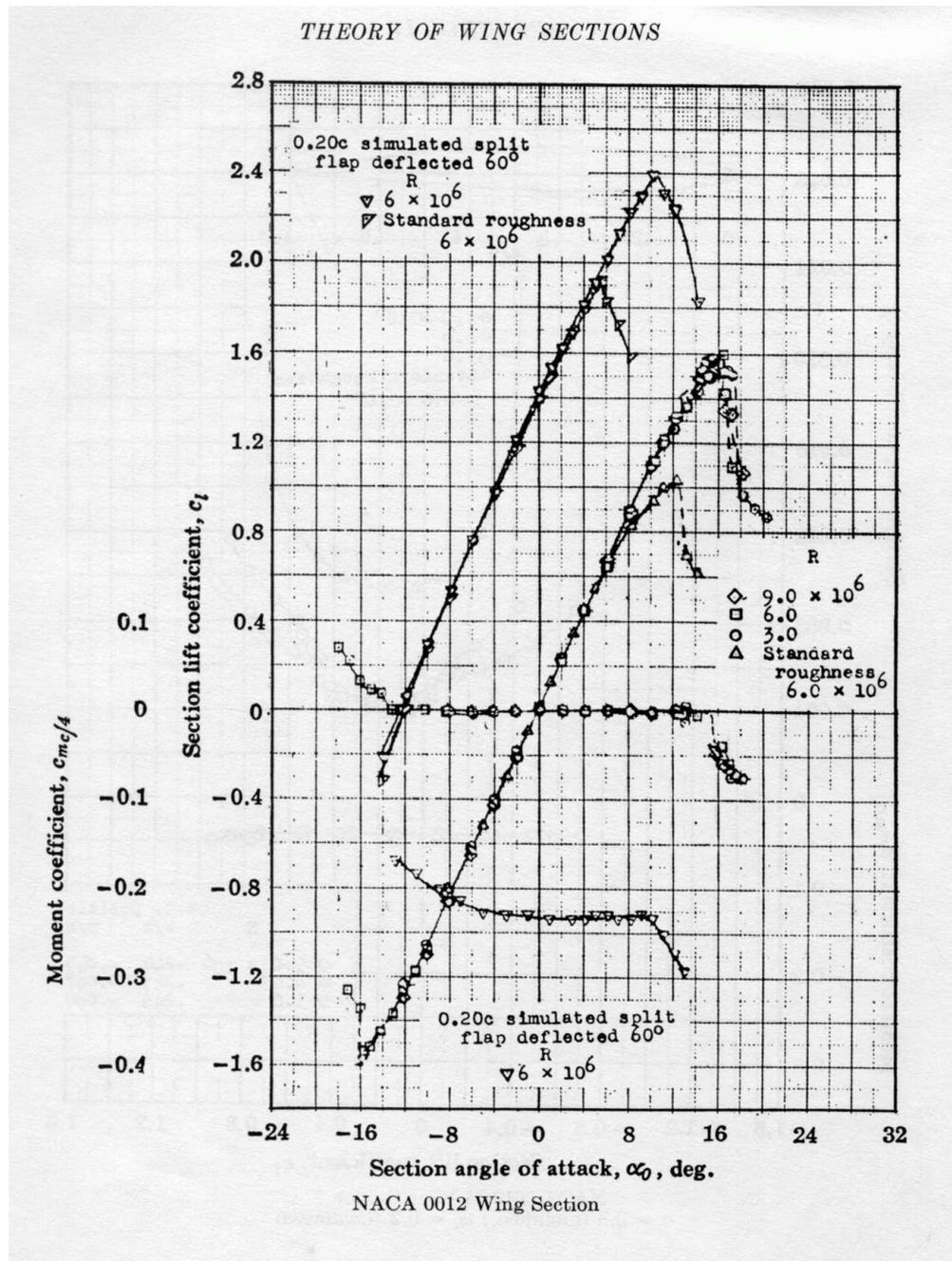


Figura III.11: Pagina estratta da "Theory of wing section"

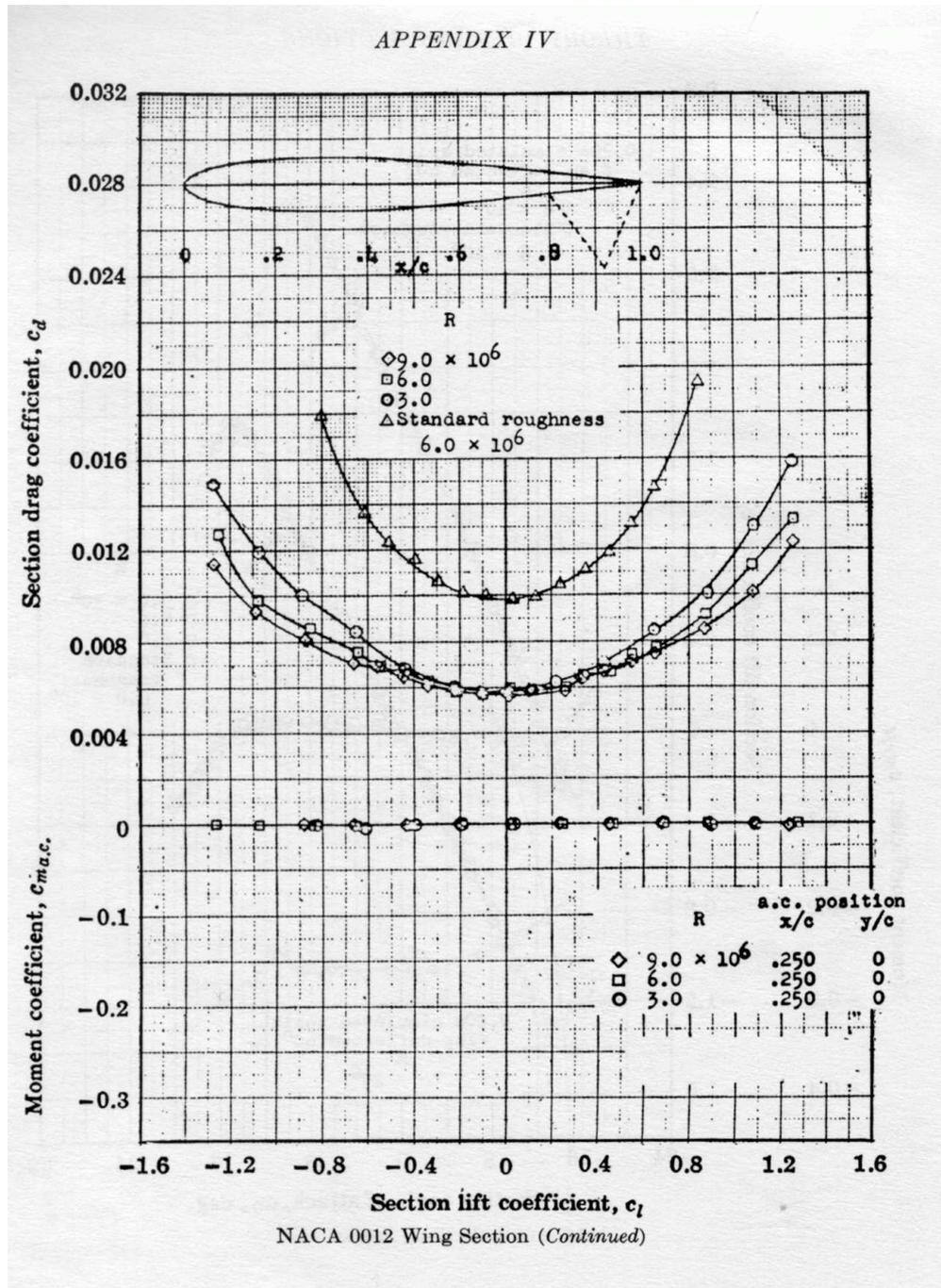


Figura III.12: Pagina estratta da "Theory of wing section"

III.4 I risultati numerici

Per presentare in maniera completa ed organica tutti i risultati ottenuti durante le prove numeriche (la tabella III.12 riporta i casi elaborati) si partirà parlando delle curve di portanza¹⁰ perchè racchiudono le informazioni più importanti: la corretta stima del C_l e la capacità di cogliere la regione di stallo. Saranno poi esposti i punti salienti inerenti la convergenza ed infine si tratteranno tutte le informazioni relative al flusso sul profilo ($C_p, C_f, \text{entropia}$), alle polari ed alla qualità delle griglie. Inizialmente si analizzeranno i risultati ottenuti con il modello di Spalart-Allmaras e solo in seguito si dedicherà uno spazio al confronto con il modello $k-\omega$ SST, con i risultati ottenuti utilizzando il codice FLUENT e con gli effetti dovuti alle modifiche apportate alla scia della griglia.

caso	griglia	$\kappa^{(4)}$	modello di turbolenza
polare 1	<i>fine</i>	1.0	Spalart-Allmaras
polare 2	<i>fine</i>	0.5	Spalart-Allmaras
polare 3	<i>leading edge</i>	1.0	Spalart-Allmaras
polare 4	<i>leading edge</i>	0.5	Spalart-Allmaras
polare 5	<i>half super-fine</i>	1.0	Spalart-Allmaras
polare 6	<i>super-fine</i>	1.0	Spalart-Allmaras
polare 7	<i>fine</i>	1.0	$k - \omega$ SST
polare 8	<i>half super-fine</i>	1.0	$k - \omega$ SST
polare 5a	<i>adattativa</i>	1.0	Spalart-Allmaras
polare 5ft	polare 5 in condizioni fully turbulent		
FLUENT	polare 5ft elaborata con FLUENT		

Tabella III.12: Casi elaborati

¹⁰Per quanto riguarda le curve di portanza si è preferito tracciarle utilizzando un'interpolazione spline sui dati ottenuti dalle simulazioni per renderne più agevole la lettura; saranno comunque riportati son simboli i valori calcolati

III.4.1 Le curve di portanza

La prima curva di portanza prodotta è stata ottenuta sulla griglia *fine* utilizzando un coefficiente di viscosità artificiale pari ad 1.0 (**polare 1**). Come si può vedere dalla figura III.13 la parte lineare della curva non è fedele a quella sperimentale: si nota un'anticipata perdita di linearità e soprattutto un gradiente della retta di portanza più piccolo di quello sperimentale. La curva mostra comunque un andamento simile a quello ottenuto in galleria anche se, a causa di una cattiva convergenza, non presenta valori unici di C_l a 18° ma oscillazioni periodiche (fig. III.14). Complessivamente si può pensare che questa prova sia affetta da un'eccessiva dissipazione numerica che può essere attribuita sia alla griglia (simmetrica e poco raffinata) che al modello numerico utilizzato (inclusa la probabile incapacità del modello di turbolenza di simulare bene un flusso fortemente separato).

Dopo aver analizzato questi primi risultati si è pensato di correggere quella che appariva come un'eccessiva dissipatività numerica operando sul coefficiente $\kappa^{(4)}$. Siccome l'interesse era rivolto verso la comprensione dell'effetto di tale modifica piuttosto che al raggiungimento di un risultato il più vicino possibile a quello sperimentale, si è provato ad utilizzare $\kappa^{(4)}=0.5$ (**polare 2**), senza cioè ridurlo eccessivamente. Si vuole qui ribadire come avere un $\kappa^{(4)}$ molto piccolo significhi anche rischiare l'instabilità dello schema che si è comunque verificata, pur tuttavia si è riusciti ad utilizzare il valore 0.5 pagando in cambio con una diminuzione della frequenza di Coarse Grid Corrections all'interno del ciclo multigrid (par. III.2). L'effetto di quest'intervento è facilmente intuibile dal

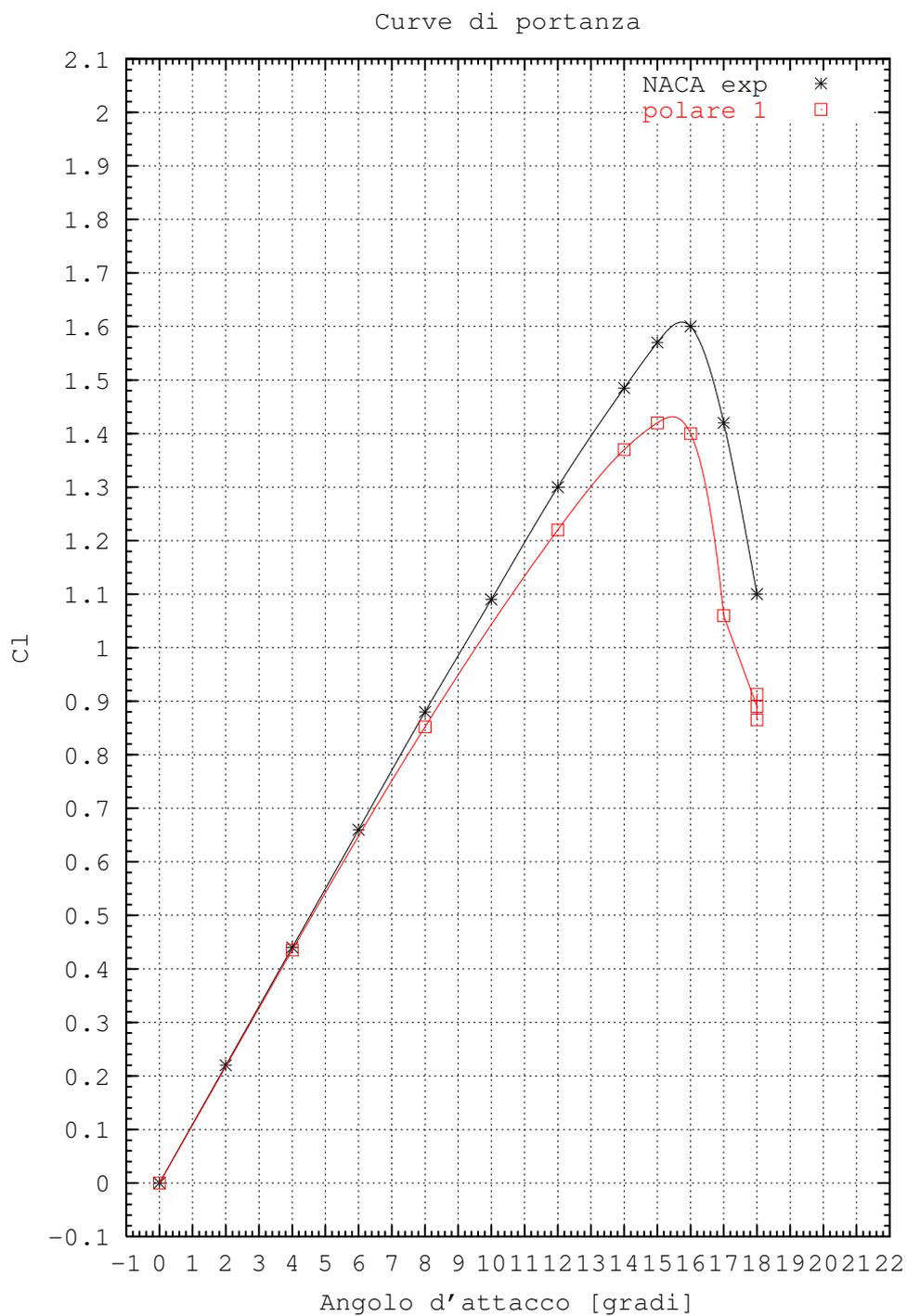


Figura III.13: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

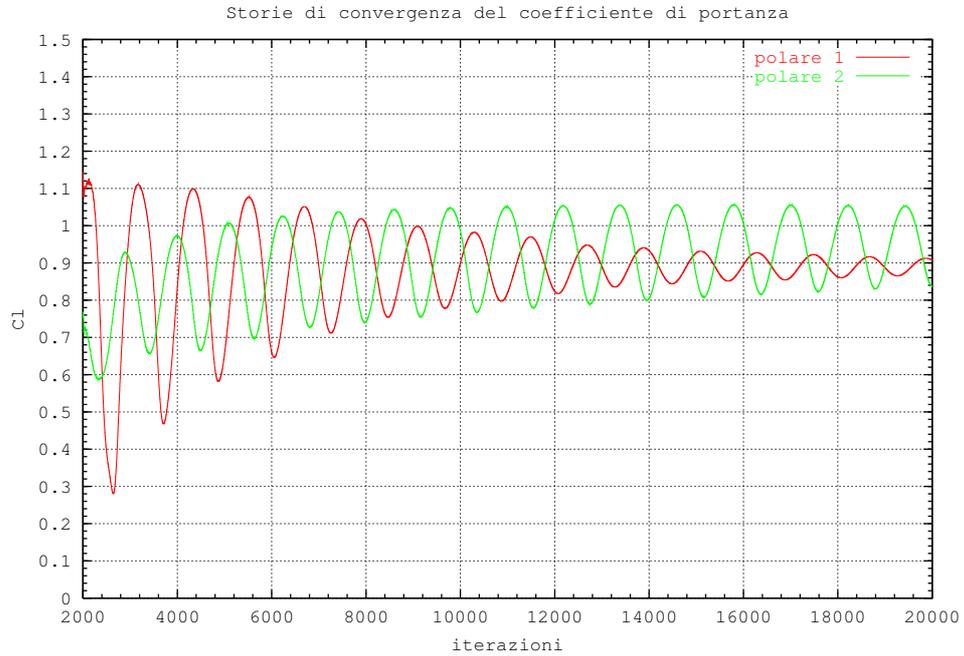


Figura III.14: Storie di convergenza del coefficiente di portanza per $\alpha=18^\circ$

confronto tra le curve riportate in figura III.15. I problemi di convergenza a 18° non sono migliorati, si è anzi accentuata l'ampiezza delle oscillazioni del C_l (fig. III.14), come ci si poteva aspettare che accadesse abbassando la viscosità artificiale. D'altra parte però la curva si è globalmente avvicinata a quella sperimentale sia nella zona lineare che nella zona dello stallo.

Per indagare meglio circa l'effetto prodotto è stato utile analizzare i grafici del C_p ottenuti alle diverse incidenze con i due valori di $\kappa^{(4)}$ (in figura III.16 si riporta il confronto per $\alpha=14^\circ$) e l'osservazione di come il picco di espansione fosse più alto quando si riduceva il contributo di viscosità artificiale, congruente al fatto che $\kappa^{(4)}$ altera il numero di Reynolds e che nella realtà la viscosità smorza le espansioni.

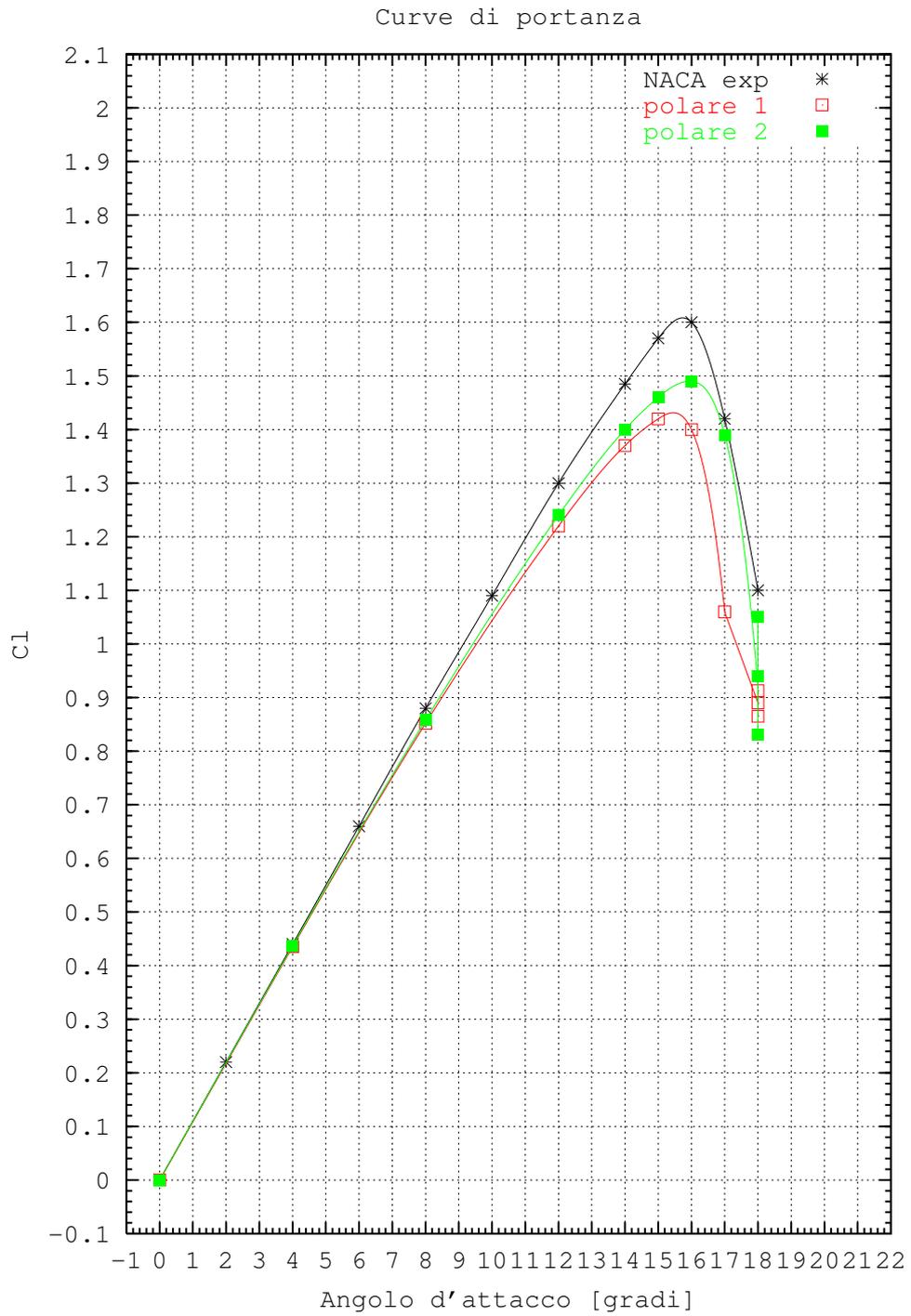


Figura III.15: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4 I risultati numerici

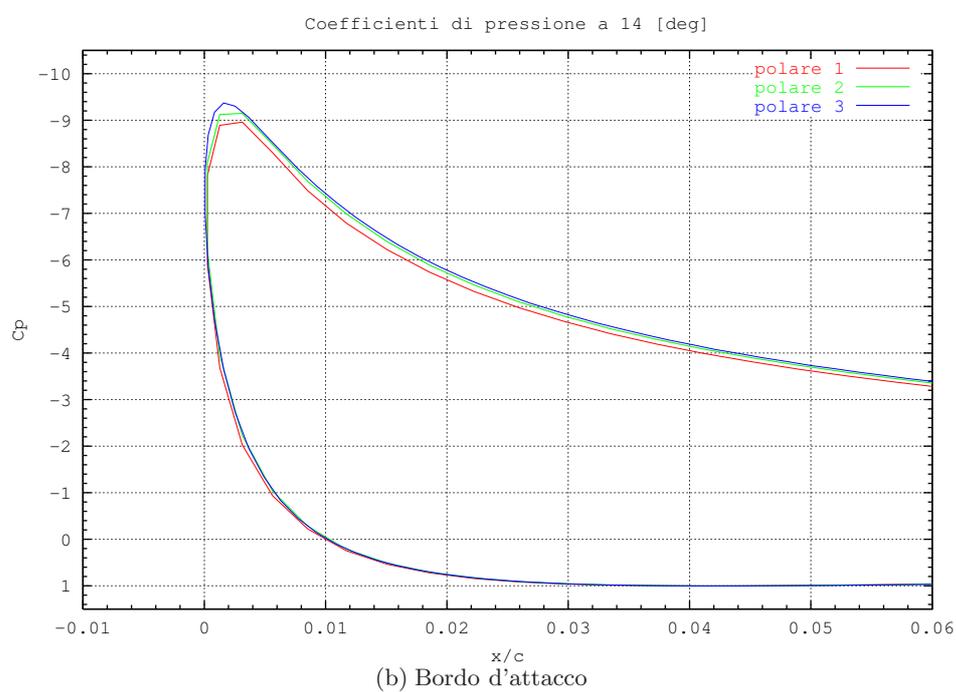
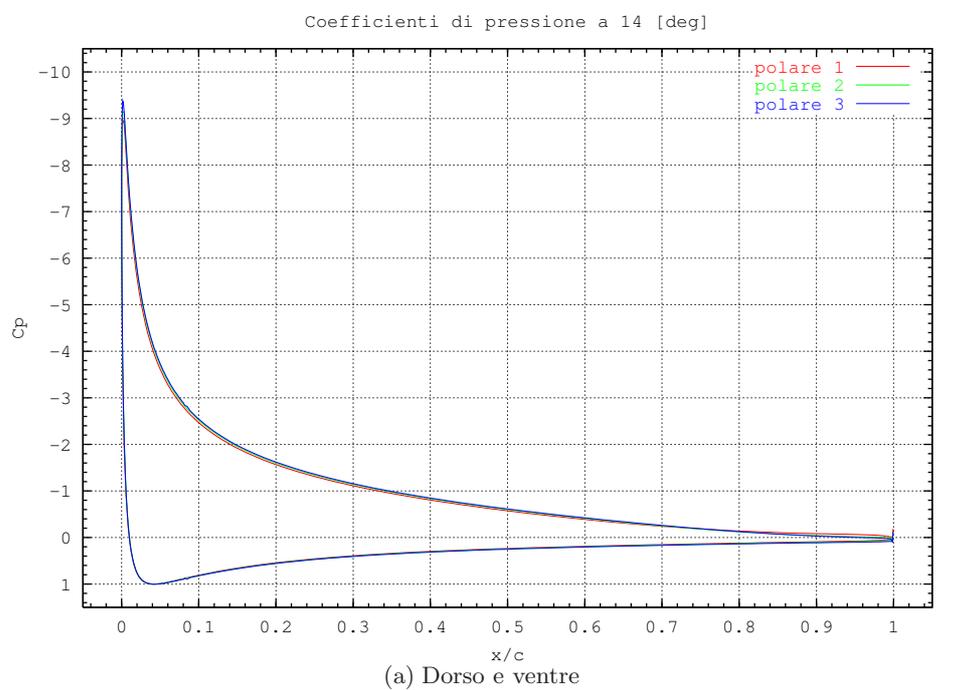


Figura III.16: Coefficienti di pressione per $\alpha=14^\circ$

Il confronto tra queste due curve e tra i coefficienti di pressione ha indicato che le soluzioni potessero essere fortemente influenzate da ciò che accadeva sul bordo d'attacco del profilo, in particolare che non bisognasse smorzare artificialmente il picco di espansione per ottenere valori di C_l prossimi a quelli sperimentali. Si è allora utilizzata la griglia *leading-edge* con $\kappa^{(4)}=1.0$ (**polare 3**) per ottenere la curva riportata in figura III.17. Ora si può meglio comprendere l'utilità di tale griglia che differisce di poco dalla griglia *fine*, perchè prevede solo una piccola modifica sul bordo d'attacco (un aumento del 14% nel numero di celle), ma che permette di capire con esattezza l'efficacia della modifica stessa. L'atteso effetto della griglia è stato confermato dai risultati perchè si è ottenuta una modifica nella curva simile a quella ottenuta abbassando la viscosità artificiale (almeno fino a 14°) ed in più si è riusciti a trovare la convergenza fino a 19° (anche se ciò è dovuto in parte alla qualità della griglia ed alla viscosità artificiale non ridotta ed in parte al fatto che trovando valori di C_l mediamente più alti ci sono anche flussi meno separati). Questo risultato era previsto perchè una griglia più raffinata introduce una dissipazione numerica più contenuta ed in questo modo si è riusciti a conservare il picco di espansione, come mostrato in figura III.16.

Per meglio comprendere i risultati ottenuti con queste prove si è reso necessario lo sviluppo di altre due curve di portanza (fig. III.18): per la prima si è utilizzata la griglia *leading-edge* con $\kappa^{(4)}=0.5$ (**polare 4**) per studiare la concomitanza delle due modifiche mentre per la seconda si è utilizzata la griglia *half super-fine* con $\kappa^{(4)}=1.0$ (**polare 5**) per valutare l'importanza del affinamento

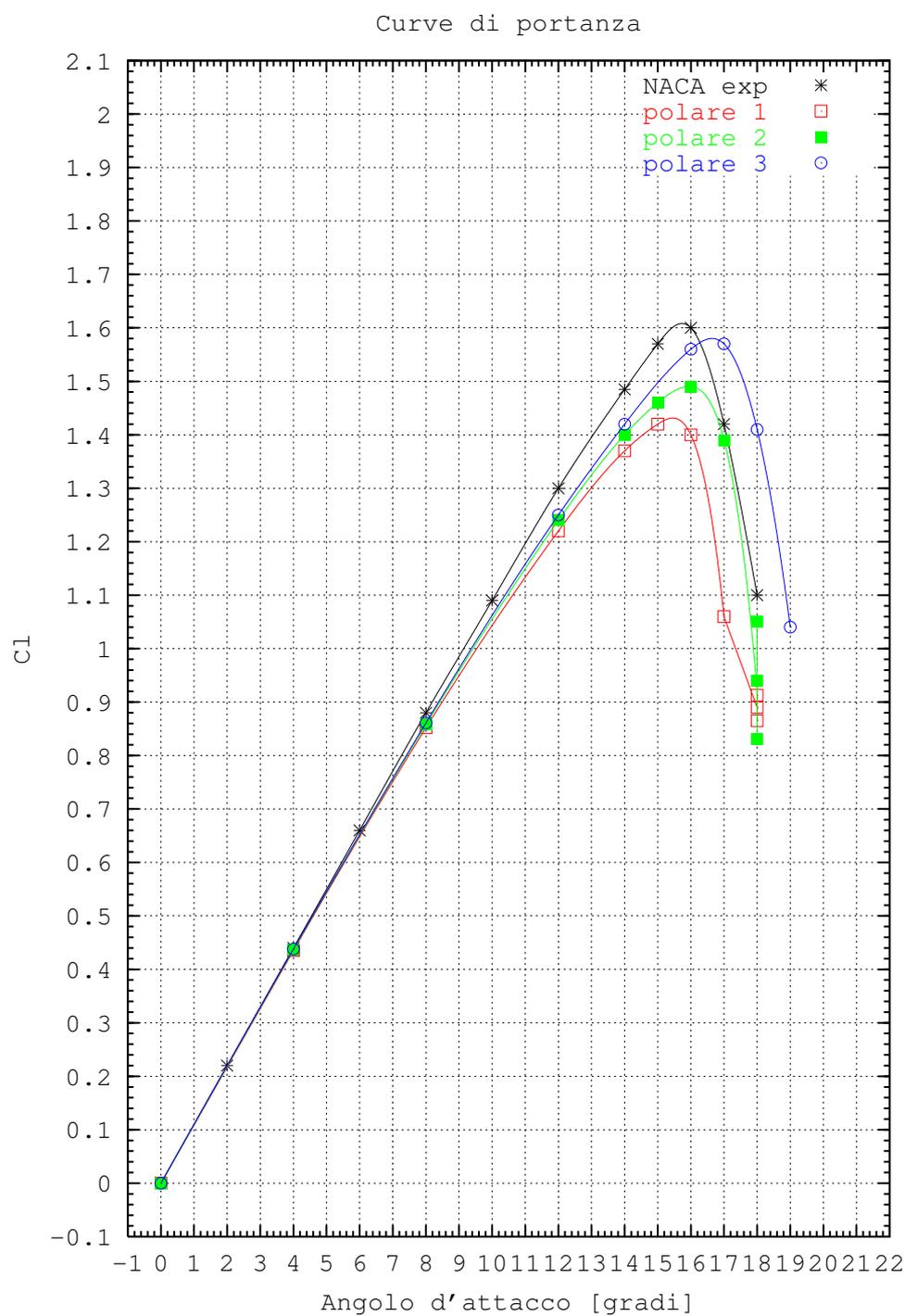


Figura III.17: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

del bordo d'attacco rispetto ad un analogo affinamento esteso anche alla restante parte del dominio di calcolo. Si tenga presente che le griglie *leading edge* ed *half super-fine* affinano meglio il dominio di calcolo rispetto alla griglia *fine* in modo da aumentare l' aspect-ratio delle celle e ciò, come illustrato nel paragrafo II.3.1, dovrebbe rendere più efficiente lo schema JST. Entrambe le prove non hanno prodotto risultati diversi da quelli già ottenuti in **polare 3** fino a circa 16° il che dimostra come, almeno fino a questa incidenza, gli effetti dovuti al affinamento del bordo d'attacco ed all'abbassamento della viscosità artificiale siano sostanzialmente uguali e non sovrapponibili e l'inutilità di un ulteriore affinamento della griglia analogo a quello effettuato sulla griglia *leading-edge*. A partire da $\alpha=16^\circ$ si nota invece una progressiva divaricazione tra le varie curve ed in particolare una tendenza ad aumentare del C_l^{max} ma anche a posticipare sempre più l'incidenza critica.

Infine, con il modello di Spalart-Allmaras, si è tracciata la curva con la griglia *super-fine* (che rispetto alla griglia *fine* migliora la discretizzazione senza alterare l' aspect-ratio delle celle) e con $\kappa^{(4)}=1.0$ (**polare 6**) per capire i limiti delle simulazioni fin qui prodotte (fig. III.19). Si è riusciti ad ottenere ottimi valori di C_l nella zona lineare ma la soluzione alle alte incidenze è risultata notevolmente diversa da quelle già ottenute e dai dati sperimentali.

Osservando queste prime sei curve non si intravede la possibilità di una convergenza dei risultati e cioè un trend delle soluzioni (in particolare all'aumentare del affinamento della griglia) verso una curva limite, se non fino alle medie incidenze.

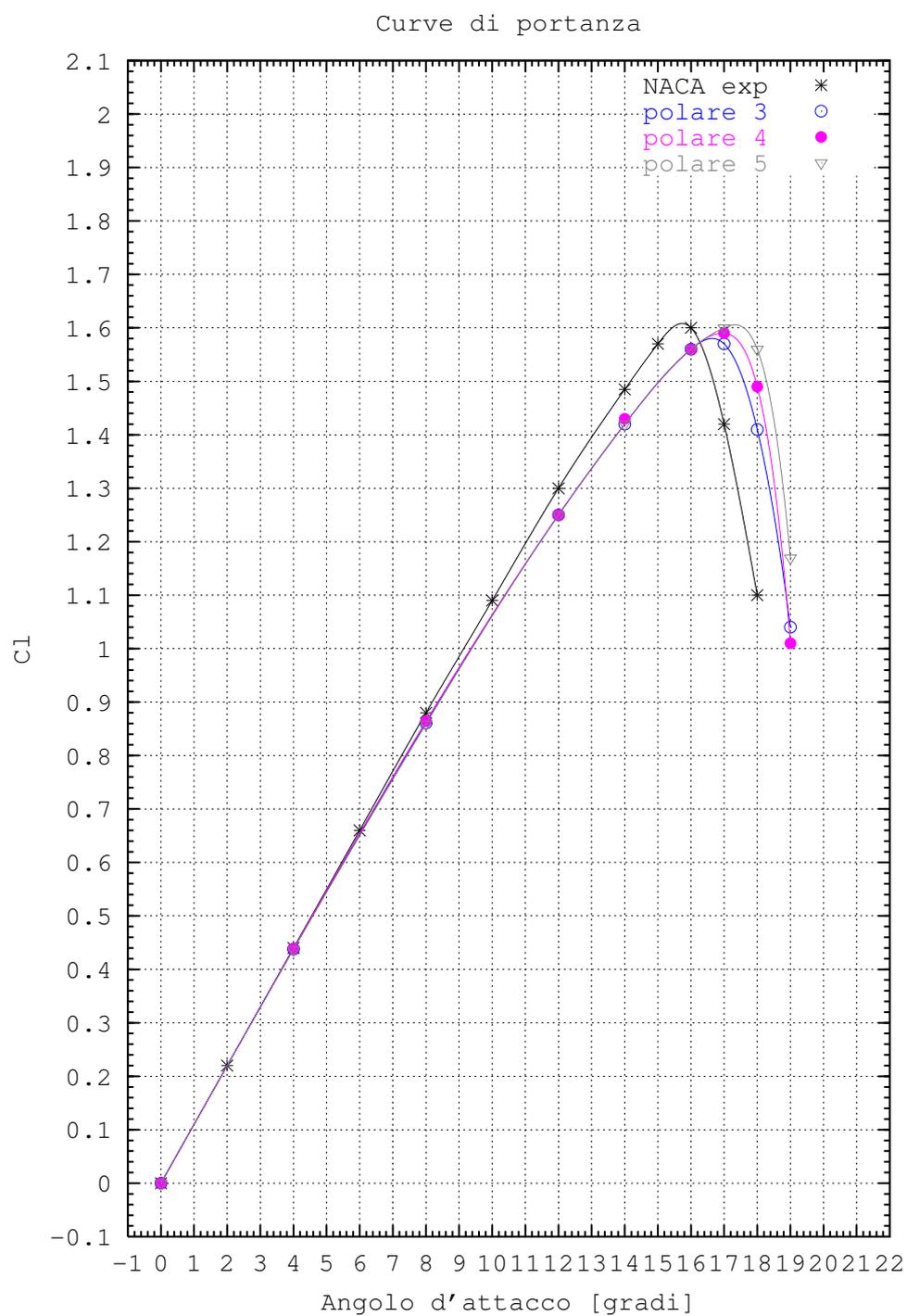


Figura III.18: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

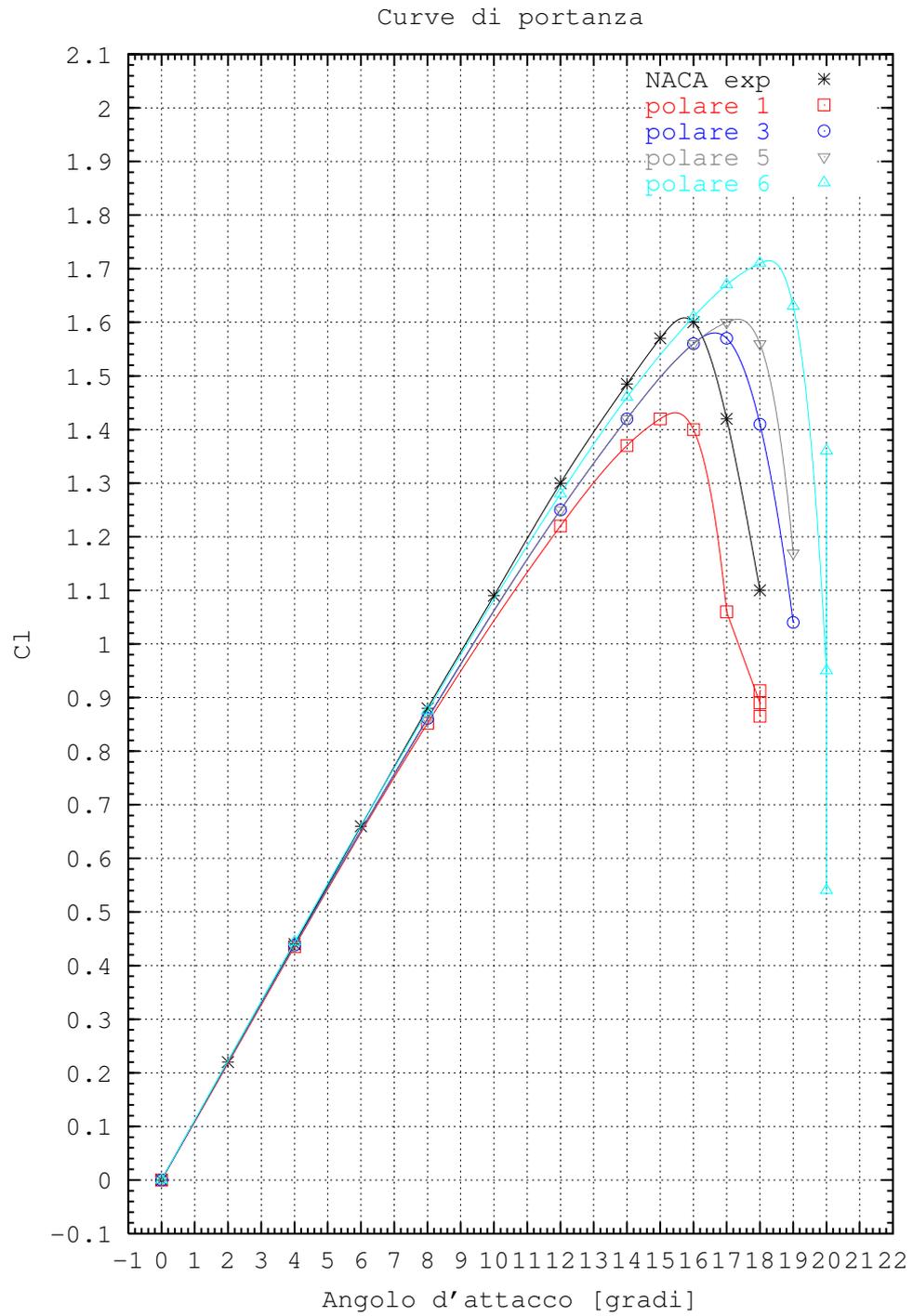


Figura III.19: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

A questo punto, pur con i limiti imposti dal numero comunque piccolo di prove, si può avanzare l'ipotesi di una scarsa dissipatività del modello di turbolenza ad alte incidenze perchè posticipa sempre più la separazione al diminuire della viscosità numerica. D'altra parte si capisce anche come sia necessario ridurre al minimo il contributo di viscosità artificiale che rappresenta sempre una distorsione non fisica del problema in esame.

III.4.2 La convergenza

Quando si effettuano simulazioni di questo tipo è importante analizzare le storie di convergenza relative ai tre coefficienti aerodinamici (C_l, C_d, C_m) ¹¹ ed al residuo (RMS) per comprendere quale sia la capacità di raggiungere, quando esistono, risultati stazionari.

Per poter effettuare un confronto tra i casi fin qui studiati è necessario scegliere opportunamente la condizione che li accomuna. Un confronto a pari α non sarebbe significativo (se non alle incidenze medio-basse) perchè, come si è visto, spesso si sono ottenuti risultati molto diversi alle stesse incidenze con una conseguente diversa difficoltà numerica nel raggiungere la convergenza. Un confronto a pari C_l potrebbe risolvere questo problema ma sarebbe oneroso, ed in alcune situazioni addirittura impossibile, ricercare valori di C_l uguali per tutti i casi. Si è così pensato ad un confronto a parità di condizione aerodinamica ed in particolare di utilizzare tutti i risultati ottenuti allo stallo o, equivalentemente, a C_l^{max} . Ovviamente si parla di una incidenza di stallo con un margine di errore dovuto alla risoluzione (step di 1° nella variazione dell'an-

¹¹Per facilitare la lettura di questi diagrammi si è preferito riportare le storie di convergenza del solo ultimo livello di griglia

III. LE POLARI DEL NACA 0012

golo d'attacco) adottata per le simulazioni (in tabella III.13 sono riportati i valori, sia calcolati che ricavati dall'interpolazione spline, di C_l^{max} e di α_{stallo}). Come si può notare dalla lettura dei diagrammi relativi al C_l , si è verificata una prevedibile degradazione della rapidità di convergenza quando si è ridotta la viscosità artificiale e quindi la frequenza delle Coarse Grid Corrections. Dai diagrammi del residuo si ha invece una stima della qualità della convergenza; in tutti i casi si ha un abbattimento del residuo di circa 6 ordini di grandezza ma rimane comunque non particolarmente soddisfacente il valore minimo raggiunto ($\text{Log}(\text{RMS})=10^{-3}$), il che dipende sia dall'aver utilizzato un codice comprimibile con $M=0.15$ sia dalle caratteristiche del modello di turbolenza.

	polare1	polare2	polare3	polare4	polare5	polare6
α_{stallo} (calcolato)	15°	16°	17°	17°	17°	18°
α_{stallo} (interpolato)	15.5°	15.9°	16.7°	16.9°	17.3°	18.4°
C_l^{max} (calcolato)	1.42	1.49	1.57	1.59	1.60	1.69
C_l^{max} (interpolato)	1.44	1.49	1.58	1.59	1.61	1.70

Tabella III.13: Incidenze critiche e C_l^{max}

Per una lettura più accurata dei grafici si ritiene inoltre utile l'utilizzo della tabella III.14 in cui sono riportati i confronti tra quelli che sono i tempi di calcolo, stimati sulla base del numero di celle di ciascuna griglia, necessari all'esecuzione di una singola iterazione.¹²

¹²Si tenga presente che il tempo necessario ad effettuare un'iterazione è dovuto, oltre che al numero di incognite proporzionale al numero di celle, anche ai livelli di multigrid utilizzati ed allo spazio necessario a gestire il Workspace

III.4 I risultati numerici

	griglia <i>fine</i>	griglia <i>leading edge</i>	griglia <i>half</i> <i>super-fine</i>	griglia <i>super-fine</i>
costo 1 iterazione	1	1.14	2	4

Tabella III.14: Tempi computazionali relativi

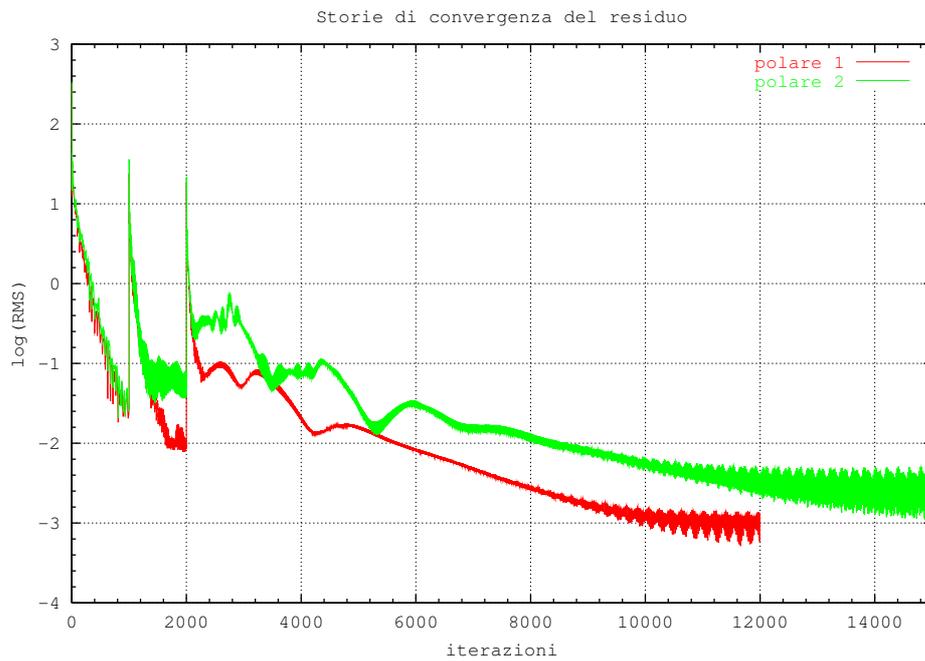


Figura III.20: Storie di convergenza del logaritmo del residuo (RMS) a C_l^{max}

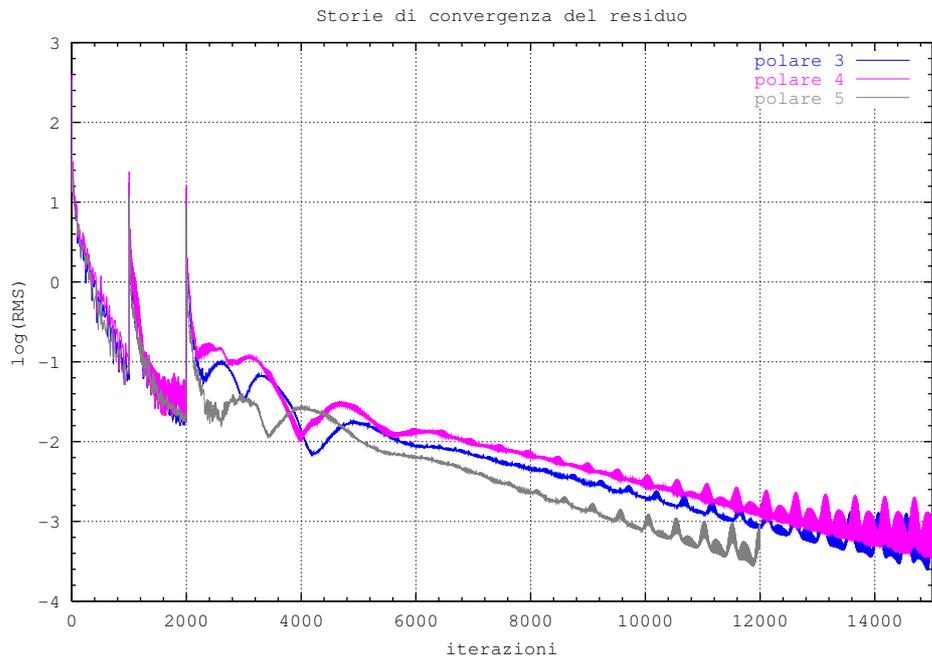


Figura III.21: Storie di convergenza del logaritmo del residuo (RMS) a C_l^{max}

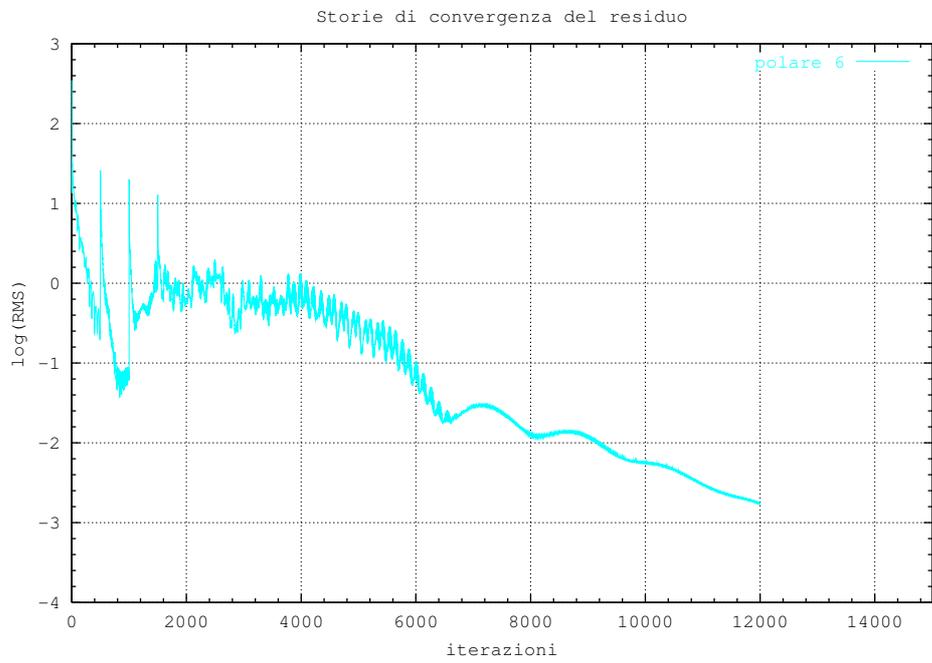


Figura III.22: Storie di convergenza del logaritmo del residuo (RMS) a C_l^{max}

III.4 I risultati numerici

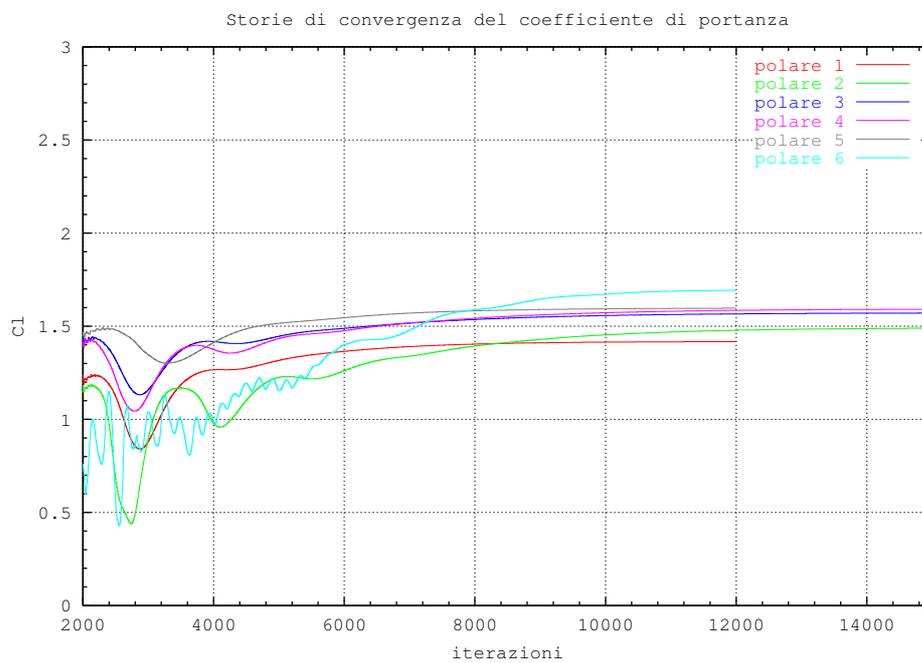


Figura III.23: Storie di convergenza del coefficiente di portanza a C_l^{max}

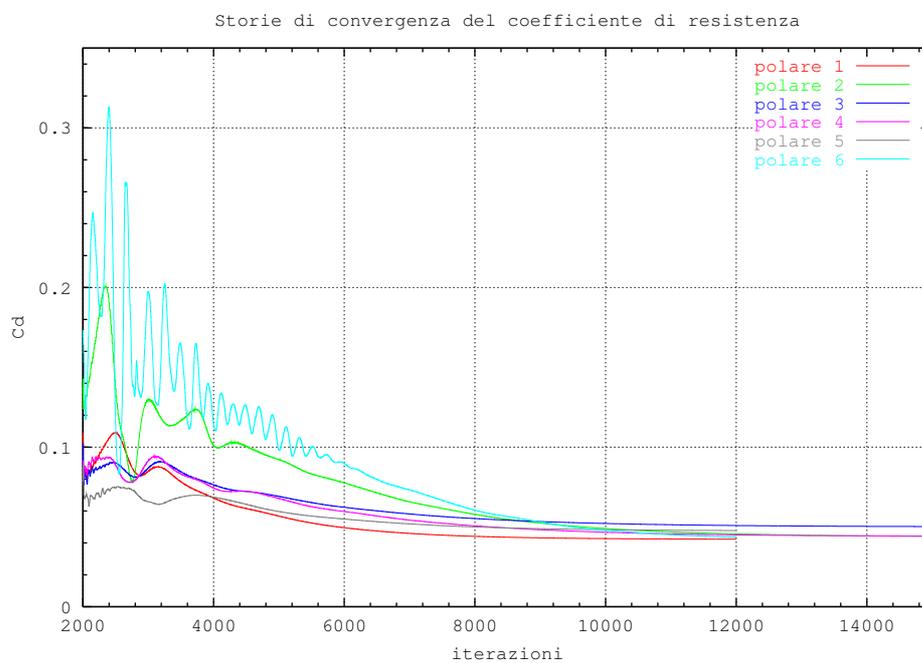


Figura III.24: Storie di convergenza del coefficiente di resistenza a C_l^{max}

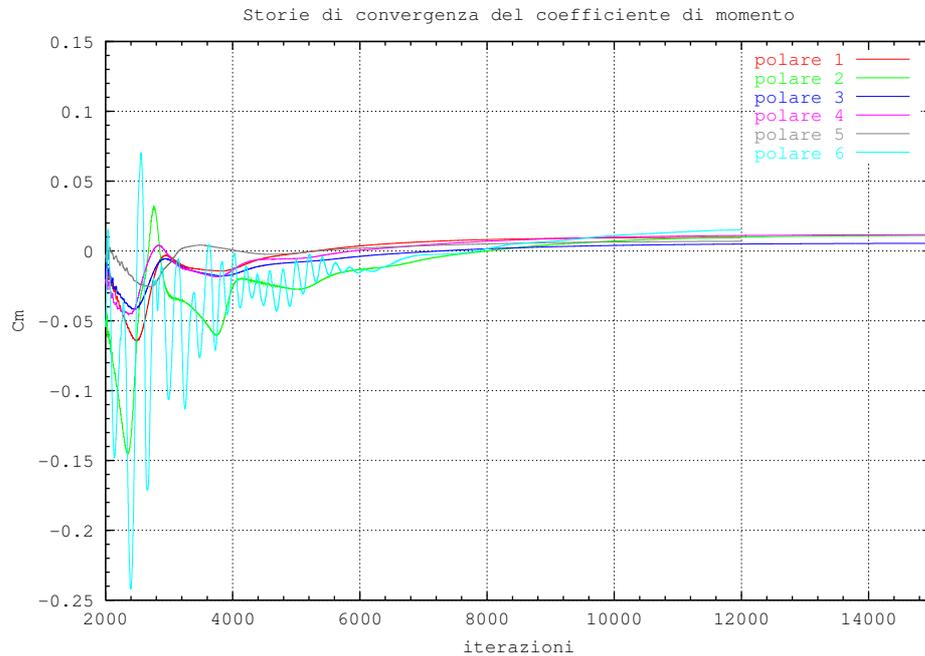


Figura III.25: Storie di convergenza del coefficiente di momento a C_t^{max}

III.4.3 I grafici del C_f e del C_p

Analizzare i grafici del coefficiente di attrito è molto interessante perchè si ha un'idea immediata della zona di separazione: il punto sul dorso del profilo in cui numericamente risulta $C_f=0$ è il punto di separazione del flusso per la simulazione.¹³

Scelto come riferimento il test a 16° si hanno i diagrammi di figura III.26 dai quali risulta evidente come ci siano situazioni molto discordanti: si passa dall'aver un flusso separato fin dal 41% del corpo ad un flusso separato all'84% del corpo. Affiancando a questi i relativi grafici di C_p (fig. III.27) si ha un quadro completo del flusso sulla parete. Alla zona di flusso separato corrisponde

¹³Il coefficiente d'attrito viene diagrammato seguendo l'ascissa curvilinea lungo il profilo in senso orario

coerentemente un plateau di pressione così come una più ampia separazione comporta una maggiore espansione sul ventre dovuta all'accelerazione del flusso che tende a risalire sul dorso agitando il bordo d'uscita. Da questi grafici si può anche osservare (come anticipato nel paragrafo III.2) come la scelta dei punti di transizione non abbia causato incongruenze riscontrabili dagli stessi grafici.

Rileggendo la tabella III.13 si comprende meglio il perchè di risultati così diversi: a 16° si hanno condizioni di pre-stallo, stallo e post-stallo a seconda del caso analizzato.

Per un'analisi più approfondita è dunque necessario (come fatto per la convergenza) anche il confronto tra tutti i risultati ottenuti in condizioni di incidenza critica. Adesso i punti di separazione sono compresi tra il 53% ed il 61% della corda (fig. III.28) ed assume maggior valore la figura III.28 dei relativi diagrammi di C_p con il particolare del bordo d'attacco che mette in risalto i picchi di espansione.

III. LE POLARI DEL NACA 0012

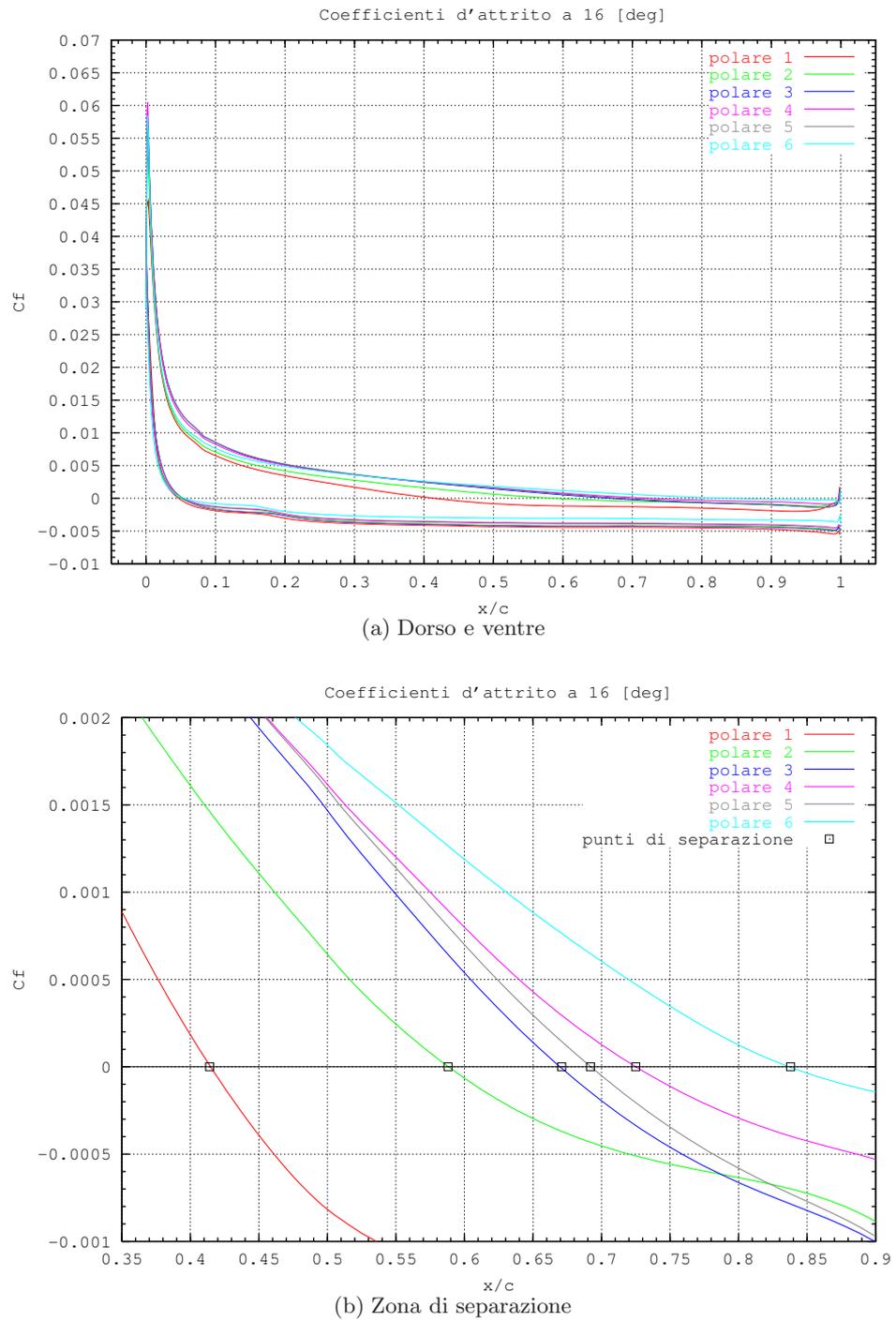


Figura III.26: Coefficienti di attrito (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4 I risultati numerici

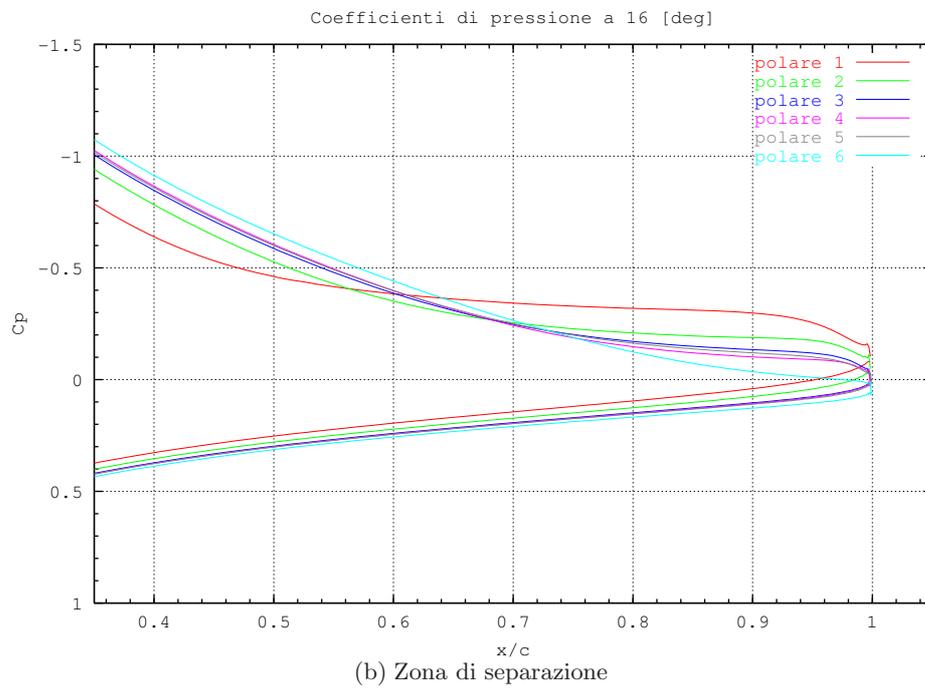
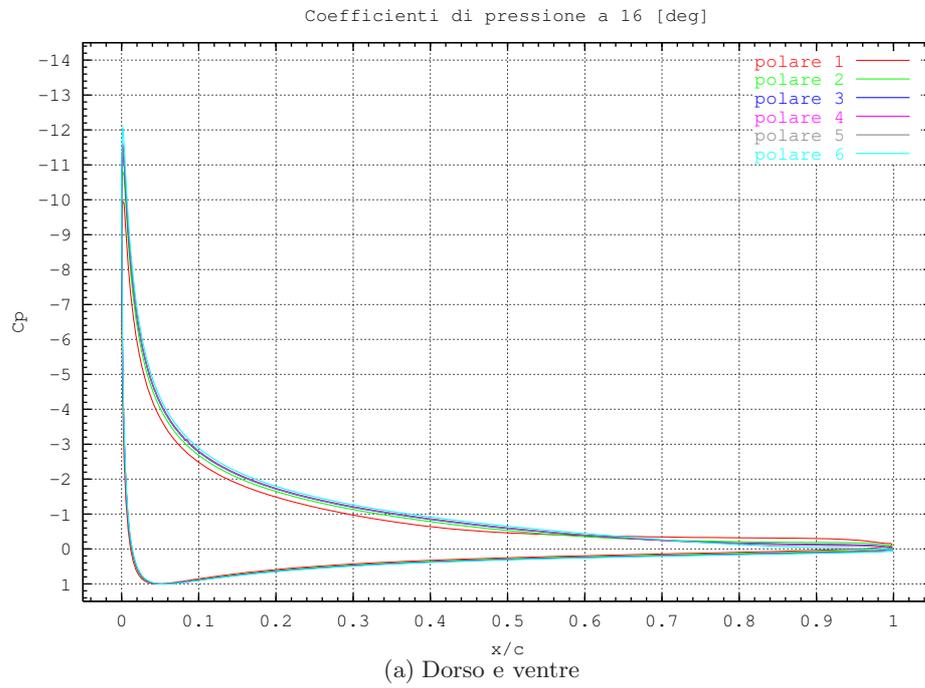


Figura III.27: Coefficienti di pressione (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III. LE POLARI DEL NACA 0012

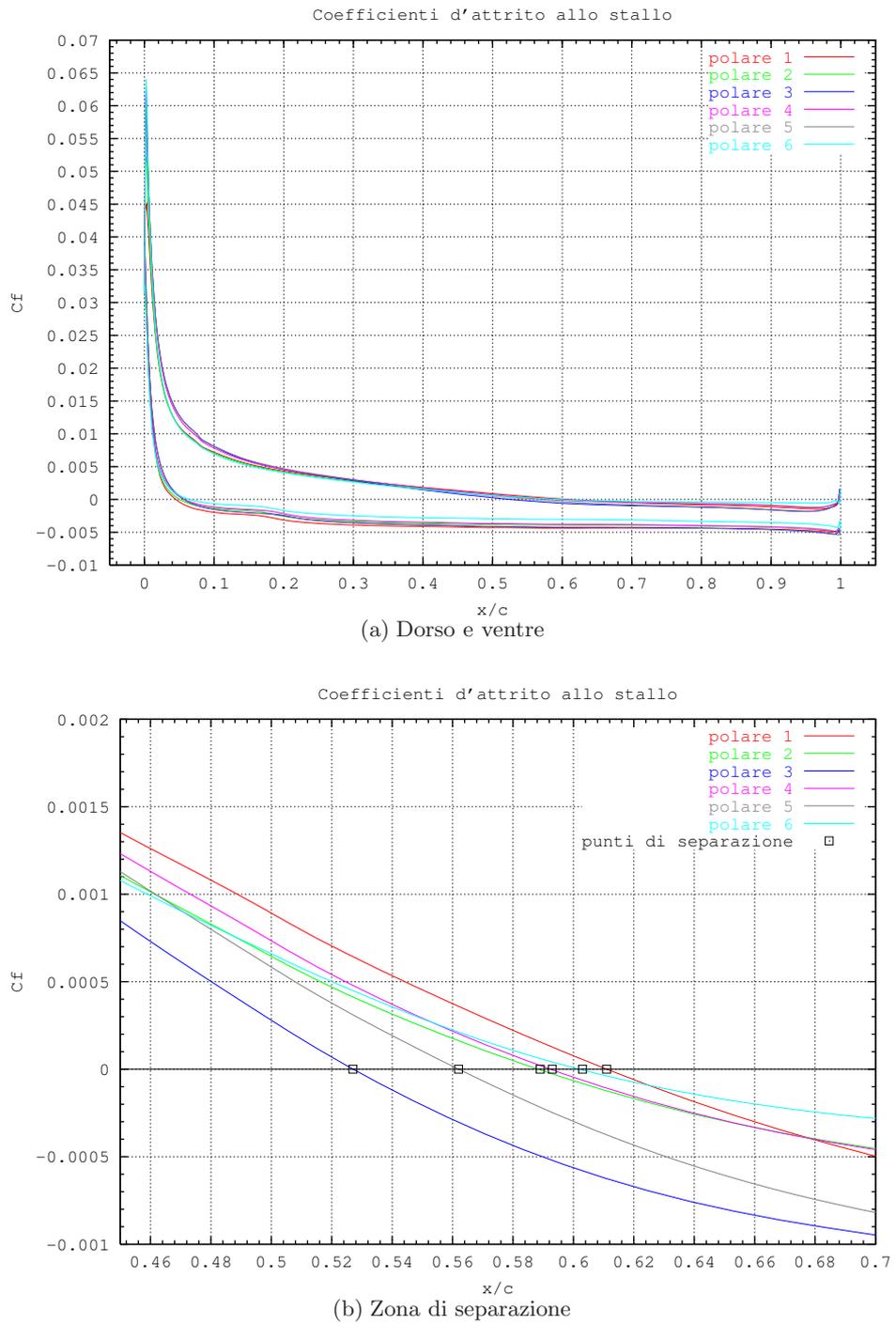


Figura III.28: Coefficienti di attrito (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4 I risultati numerici

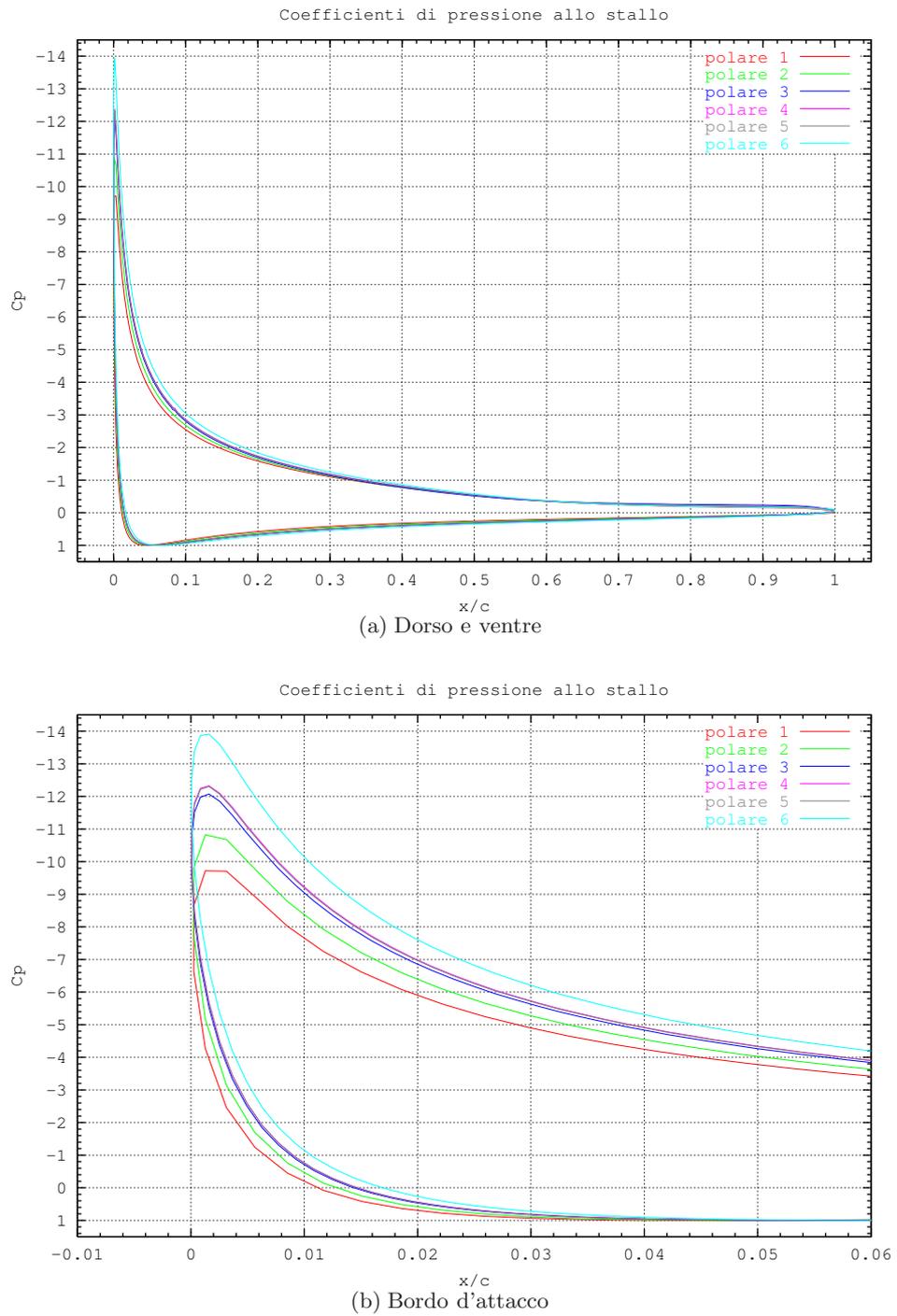


Figura III.29: Coefficienti di pressione (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4.4 L'entropia

I diagrammi dell'entropia servono per capire l'entità degli errori numerici e della dissipazione complessiva presenti nella soluzione. La dissipazione è proporzionale al valore dell'entropia (lo zero indica assenza di produzione) mentre gli errori numerici sono evidenziati sia dai valori negativi (non fisici) sia da valori positivi in zone dove c'è assenza di fenomeni dissipativi.

Dai diagrammi relativi alla stazione al 30% sul dorso del profilo (fig. III.30) si ricava un'indicazione sulla dissipatività ottenuta nei vari casi e si intravede la comparsa di valori dovuti ad errori numerici. In particolare, l'overshoot verso i valori negativi è causato dallo stretching della griglia. Avanzando, nella direzione del flusso, questi errori si accumulano e danno luogo alle curve relative alla scia (fig. III.31) in cui si vede bene come la scia sia fonte di dissipazione ma anche come ci siano problemi numerici provenienti dalle condizioni al contorno, inoltre, è interessante notare come nel caso di **polare 5** la curva ottenuta sia nettamente diversa dalle altre e ciò potrebbe essere imputabile all'aspect-ratio della griglia *half super-fine*.

III.4 I risultati numerici

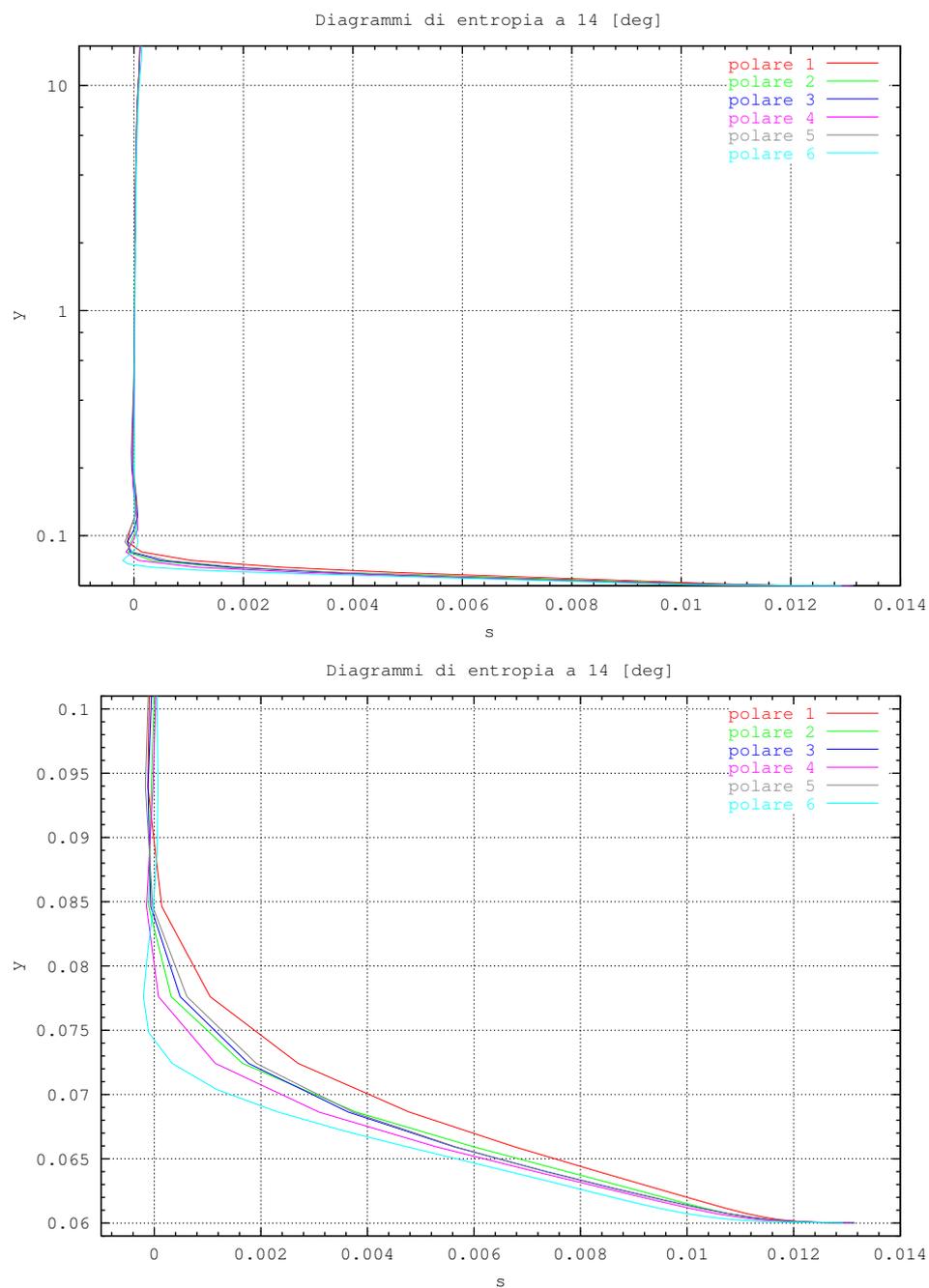


Figura III.30: Curve di entropia sul dorso del profilo al 30% della corda

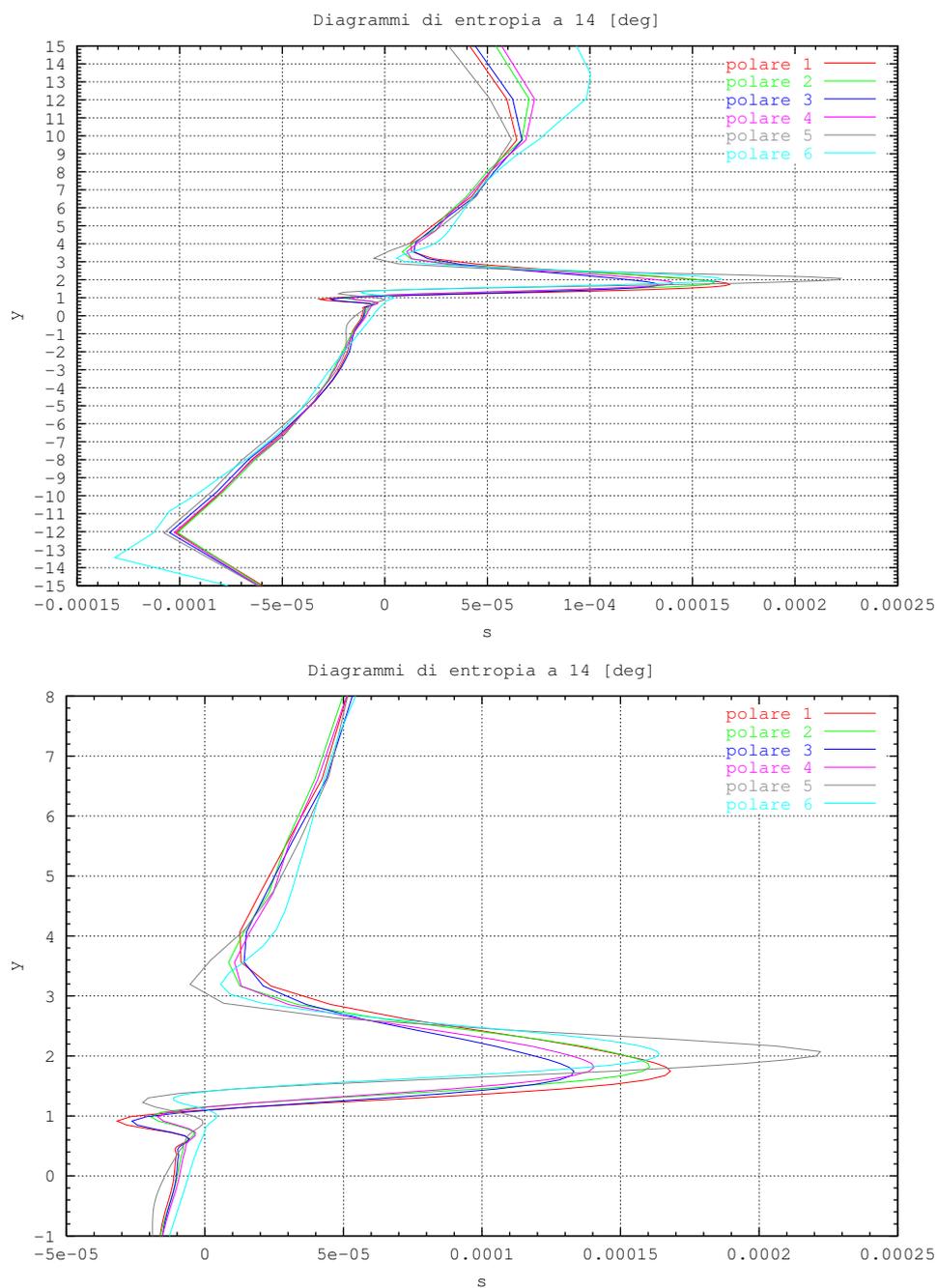


Figura III.31: Curve di entropia in scia a circa 10 corde dal profilo

III.4.5 Le polari ed il C_m

Per quanto riguarda i coefficienti aerodinamici restano ancora da analizzare le curve polari e le curve del coefficiente di momento.

Sia il C_m che il C_d confermano la sostanziale diversità dei risultati ottenuti in ciascun caso. La resistenza risulta notevolmente sovrastimata rispetto ai dati sperimentali ma ciò rispecchia quello che è un problema ben noto e dovuto all'integrazione delle forze agenti sul corpo. Per una stima più corretta della resistenza dovrebbe farsi uso di altre tecniche di cui non si è ritenuto opportuno l'approfondimento.

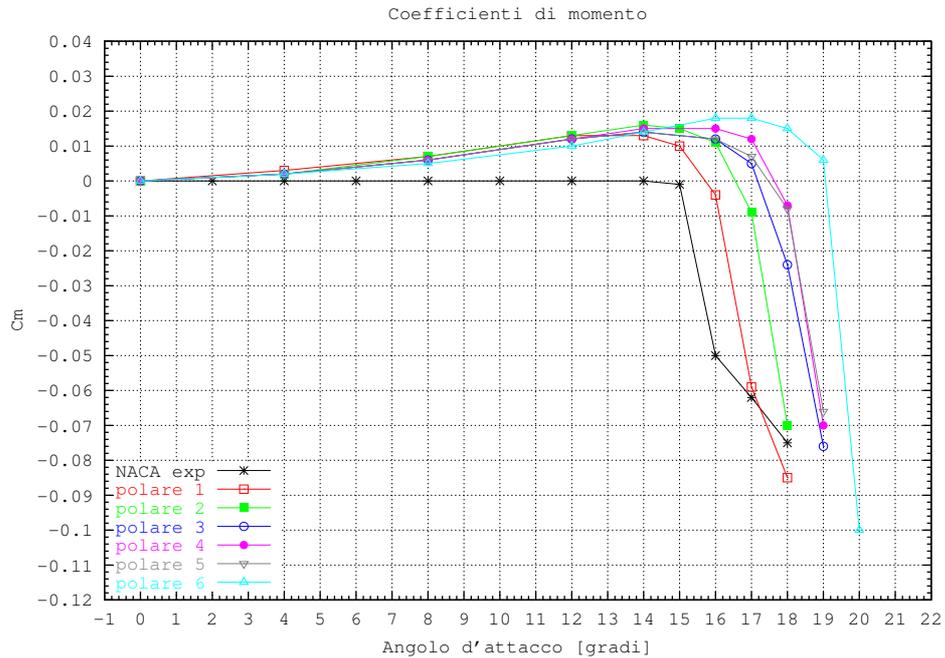


Figura III.32: Coefficienti di momento (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

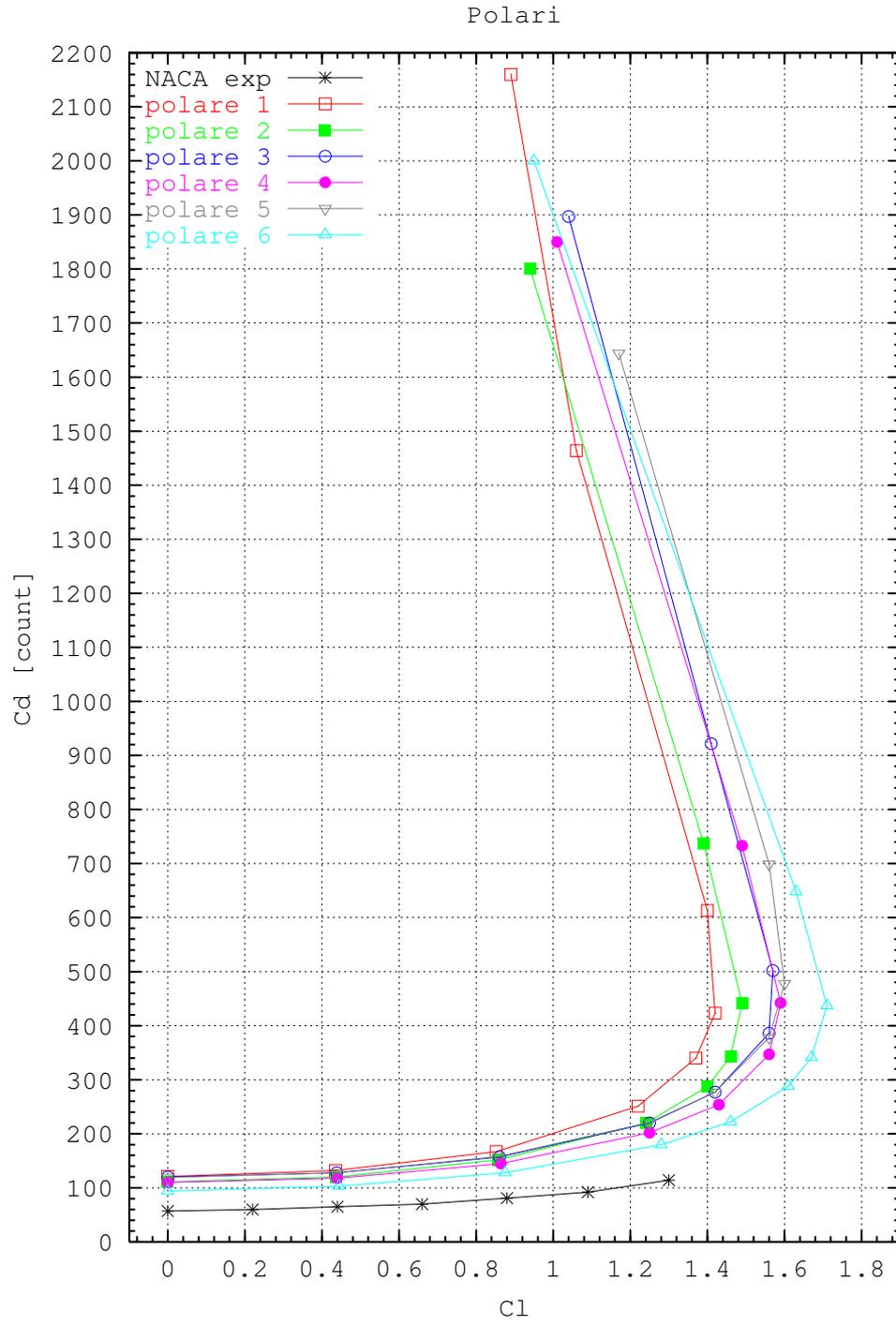


Figura III.33: Polari (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

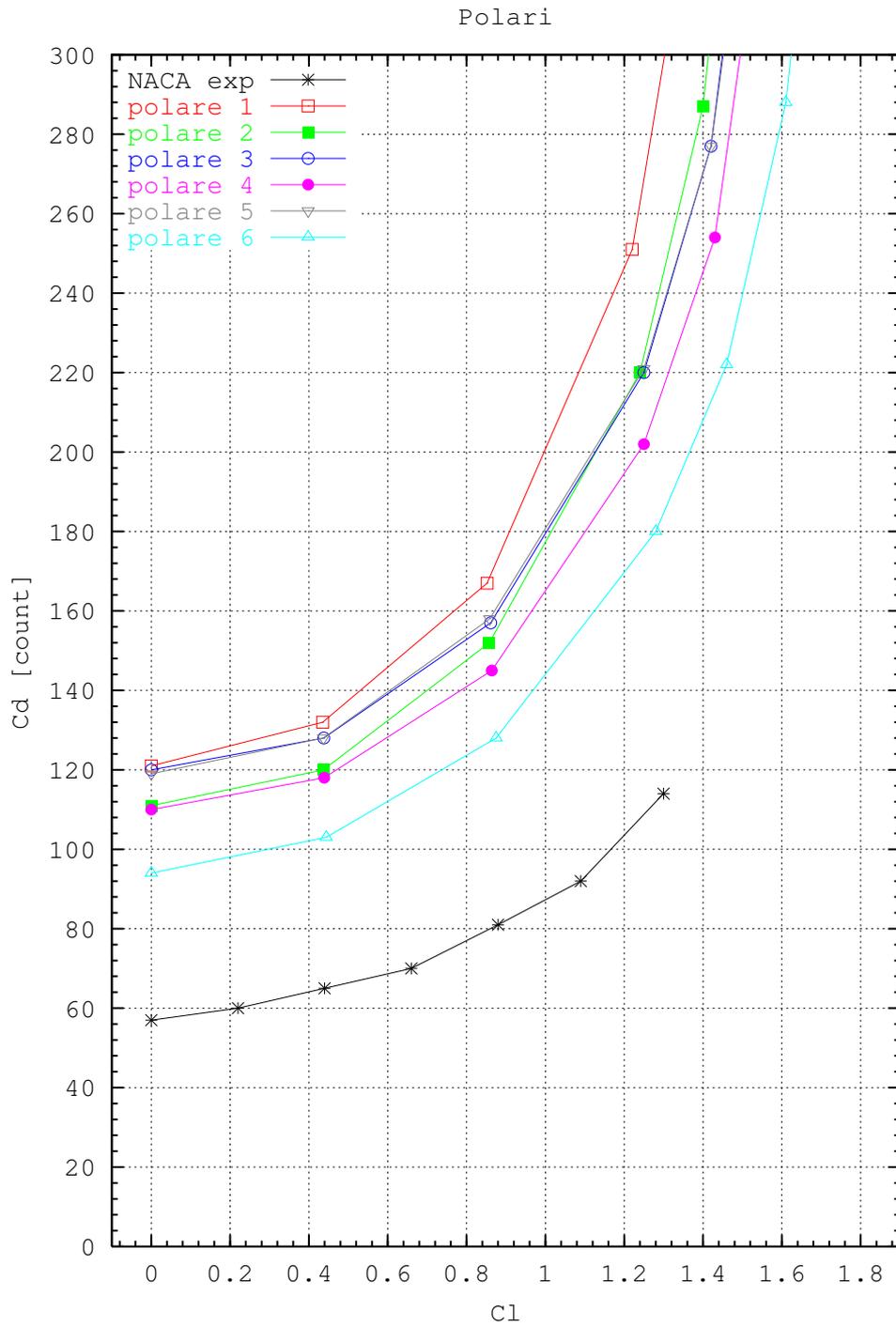


Figura III.34: Polari (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III. LE POLARI DEL NACA 0012

polare 1			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	121	0.000
4°	0.435	132	0.003
8°	0.852	167	0.007
12°	1.22	251	0.013
14°	1.37	340	0.013
15°	1.42	423	0.010
16°	1.40	613	-0.004
17°	1.06	1464	-0.059
18°	0.889*	2160*	-0.085*

polare 2			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	111	0.000
4°	0.437	120	0.002
8°	0.858	152	0.007
12°	1.24	220	0.013
14°	1.40	287	0.016
15°	1.46	343	0.015
16°	1.49	343	0.015
17°	1.39	738	-0.009
18°	0.940*	1800*	-0.070*

polare 3			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	120	0.000
4°	0.438	128	0.002
8°	0.861	157	0.006
12°	1.25	220	0.012
14°	1.42	277	0.014
16°	1.55	386	0.012
17°	1.57	502	0.005
18°	1.41	922	-0.024
19°	1.04	1897	-0.076

polare 4			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	110	0.000
4°	0.439	118	0.002
8°	0.864	145	0.006
12°	1.25	202	0.012
14°	1.43	254	0.015
16°	1.56	347	0.015
17°	1.59	442	0.012
18°	1.49	733	-0.007
19°	1.01	1850	-0.070

polare 5			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	119	0.000
4°	0.437	128	0.002
8°	0.859	158	0.006
12°	1.25	221	0.012
14°	1.42	277	0.014
16°	1.56	378	0.012
17°	1.60	478	0.007
18°	1.56	699	-0.008
19°	1.17	1644	-0.066

polare 6			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	94	0.000
4°	0.444	103	0.002
8°	0.875	128	0.005
12°	1.28	180	0.010
14°	1.46	222	0.014
16°	1.61	288	0.018
17°	1.67	341	0.018
18°	1.71	437	0.015
19°	1.63	648	0.006
20°	0.950*	2000*	-0.100*

Tabella III.15: Risultati delle simulazioni (*valori medi a causa di oscillazioni periodiche)

III.4.6 La verifica dell' y^+

Un modo per valutare la qualità di una griglia, relativamente alle caratteristiche della simulazione, è che sulla prima fila di celle computazionali adiacenti alla parete risulti

$$y^+ = \frac{d_1 U_\tau \rho_w}{\mu_w} \equiv O(1)$$

dove $U_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w}$ e d_1 è la distanza dalla parete dal centro di ciascuna cella.

Questa condizione garantisce che il numero di *grid points* in prossimità della parete sia sufficiente per una corretta simulazione dello strato limite.

Essendo di interesse solo l'ordine di grandezza dell' y^+ si è ritenuto sufficiente riportare i grafici ottenuti a 16° .

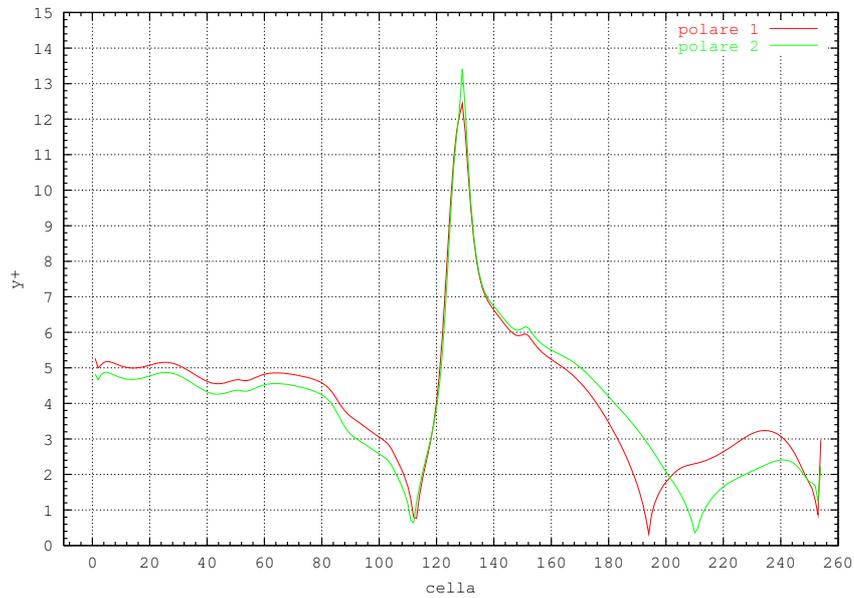


Figura III.35: y^+ per $\alpha=16^\circ$ (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

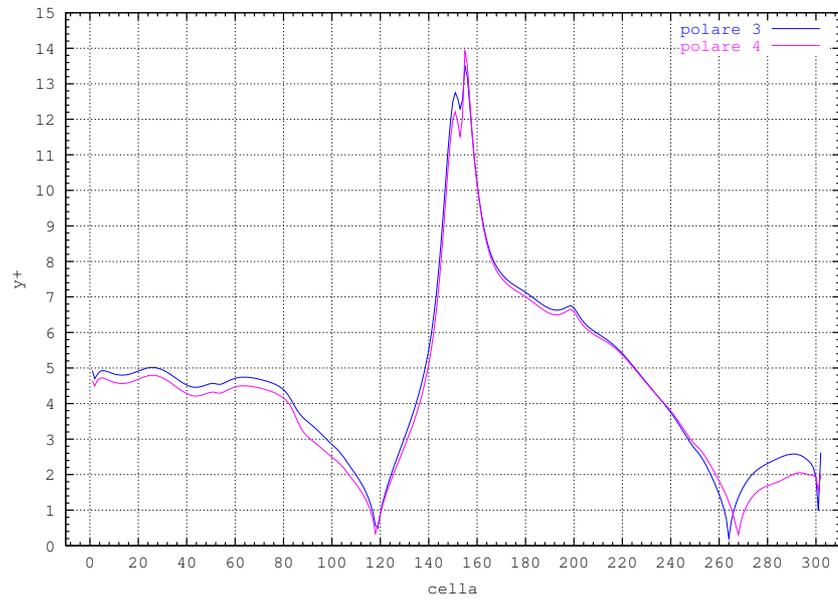


Figura III.36: y^+ per $\alpha=16^\circ$ (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

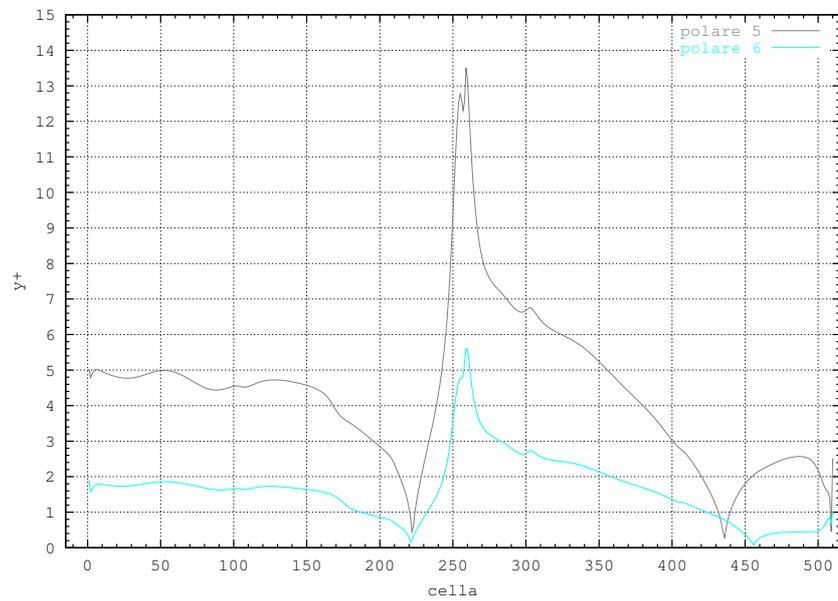


Figura III.37: y^+ per $\alpha=16^\circ$ (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4.7 Alcune immagini

Con l'ausilio di uno strumento di visualizzazione come Tecplot è stato possibile ottenere delle immagini rappresentative del lavoro svolto e particolarmente utili ad analizzare la soluzione numerica. Il caso scelto per queste immagini è quello di **polare 5** per il quale si è trovato: $\alpha_{stallo} = 17$, $C_l^{max} = 1.60$. In figura III.38 si può vedere l'evoluzione della scia turbolenta al variare dell'incidenza; si osservi come a 16° e 18° le scie siano totalmente diverse pur avendo entrambe le prove prodotto lo stesso C_l . In figura III.39 sono invece riportate le linee di corrente e l'andamento del C_p ottenuti a 18° . La vista complessiva illustra in modo molto efficace il concetto di corpo equivalente. La corrente infatti, non vede più come corpo il solo profilo ma anche tutta la zona vorticoso sul dorso e dunque si adegua a questa nuova geometria che ha una minore capacità portante. La linea di corrente che passa per il bordo d'uscita è notevolmente deviata verso l'alto ad ulteriore conferma del fatto che in queste condizioni il profilo ha una minore capacità portante. Se a ciò si aggiunge che la zona vorticoso implica un plateau di pressione sul dorso, che non permette alla corrente di ricompimersi andando verso il bordo d'uscita, si comprende come lo stallo comporti anche un drastico aumento della resistenza. Infine, in figura III.40 c'è il vector plot del campo di moto sovrapposto all'iso-Mach, sempre per il caso a 18° . Questa immagine risulta utile per visualizzare il difetto di quantità di moto causato dalla presenza del corpo, l'andamento dello strato limite e la zona di reverse-flow.

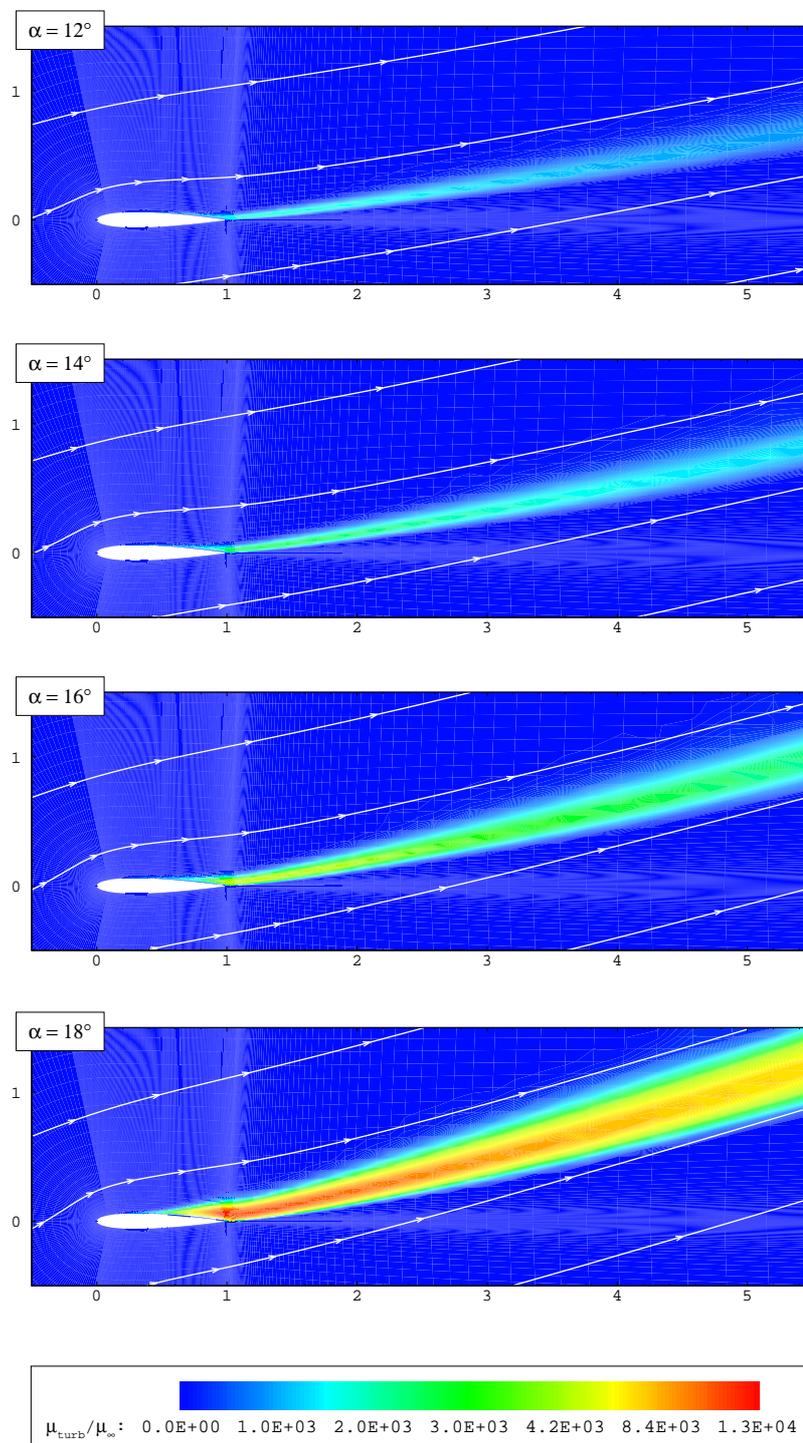


Figura III.38: Visualizzazione della scia al variare dell'incidenza attraverso l'*eddy viscosity*

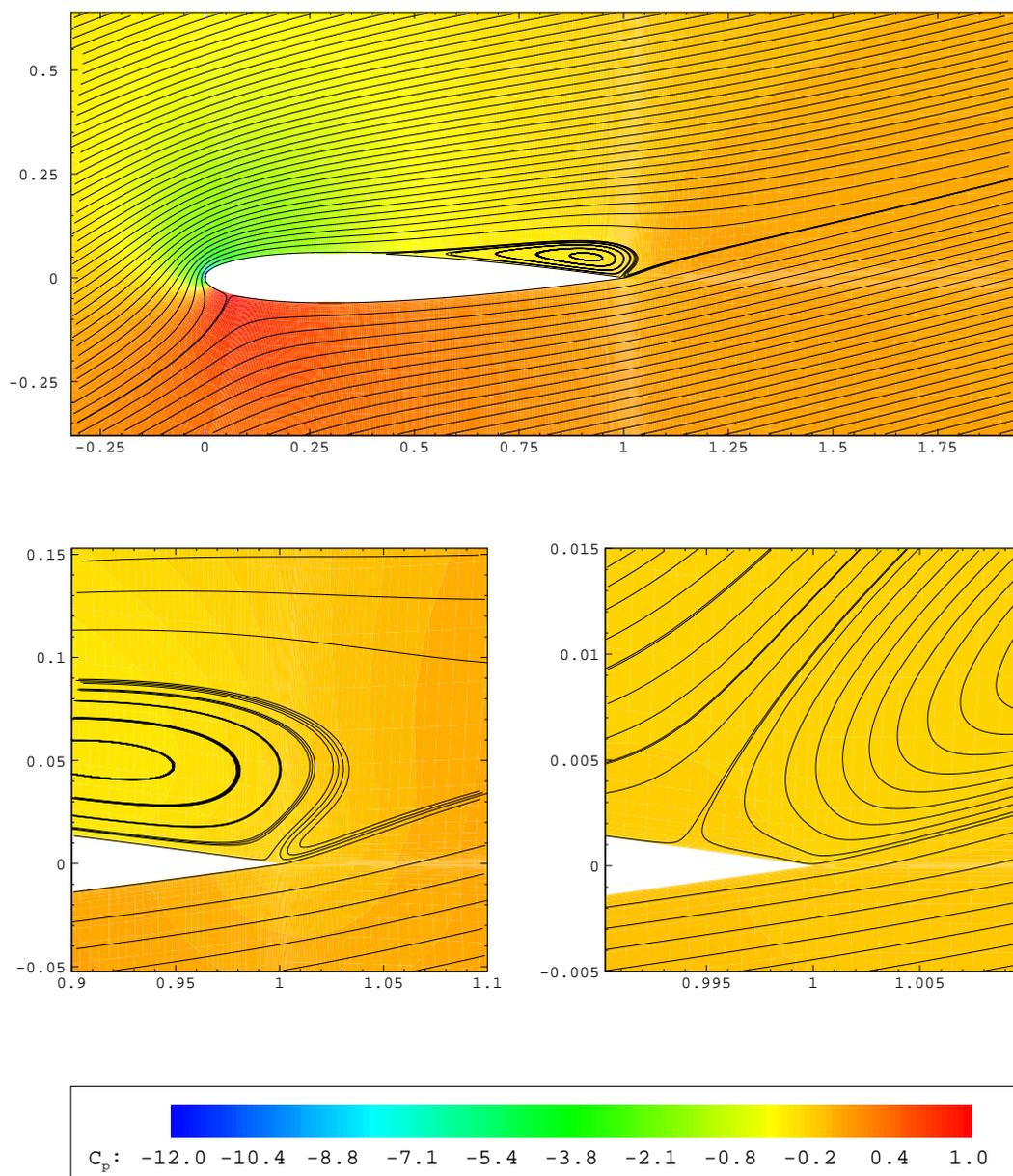


Figura III.39: Linee di corrente ed iso- C_p in condizioni di post-stallo

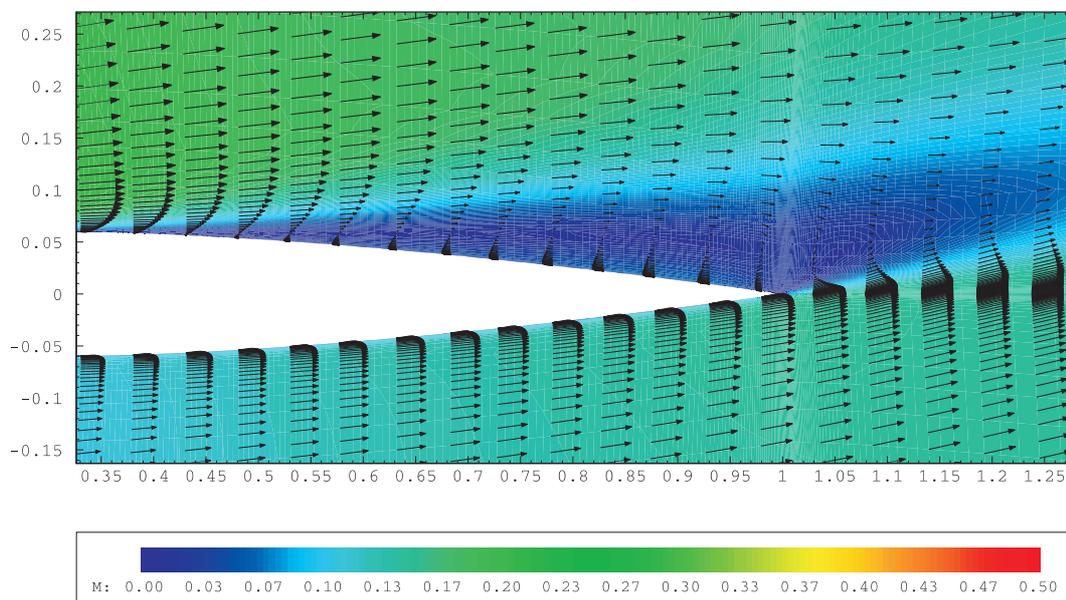


Figura III.40: Vector plot ed iso-Mach in condizioni di post-stallo

III.4.8 Il confronto tra Spalart-Allmaras e $k-\omega$ SST

Dopo aver testato il modello di Spalart-Allmaras in diversi casi si è sentita la necessità di utilizzare un secondo modello di turbolenza per poter confrontare i risultati e per cercare di capire l'effetto dovuto proprio ai modelli. Si è utilizzato il modello $k-\omega$ SST ripetendo i casi di **polare 1** e di **polare 5**.

Dai grafici dei coefficienti aerodinamici (fig. III.41-44-45) si può vedere come, fino ad incidenze che con il modello di Spalart-Allmaras risultavano di pre-stallo, i risultati ottenuti siano praticamente coincidenti. Le differenze sono invece sostanziali alle alte incidenze dove il nuovo modello non ha mostrato una buona capacità di cogliere lo stallo (difficoltà nel far diminuire il C_l e problemi di convergenza).

Il modello $k-\omega$ SST appare dunque, almeno in questi due casi, non sufficientemente dissipativo come il modello di Spalart-Allmaras, come mostrato anche dai diagrammi dei coefficienti di attrito e di pressione ottenuti a 16° (fig. III.42-43).

Un miglioramento si è avuto sul residuo (fig. III.46) che si è ridotto di un ordine di grandezza in più rispetto ai casi precedenti ma, essendo rimasto quasi inalterato il numero di iterazioni necessario alla convergenza, sono peggiorati i tempi di calcolo dal momento che il nuovo modello è costituito da due equazioni differenziali.

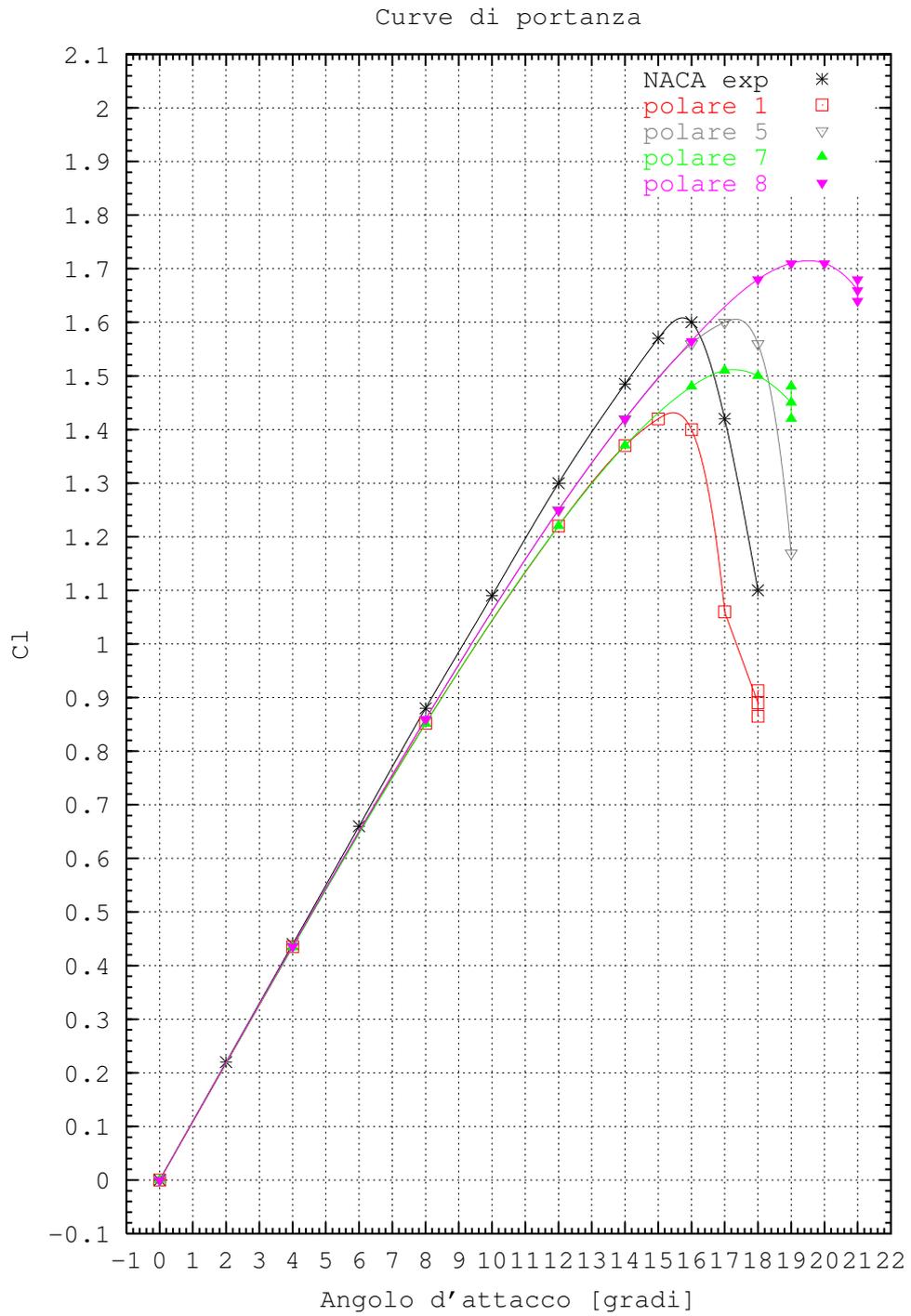


Figura III.41: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras/ $k-\omega$ SST)

III.4 I risultati numerici

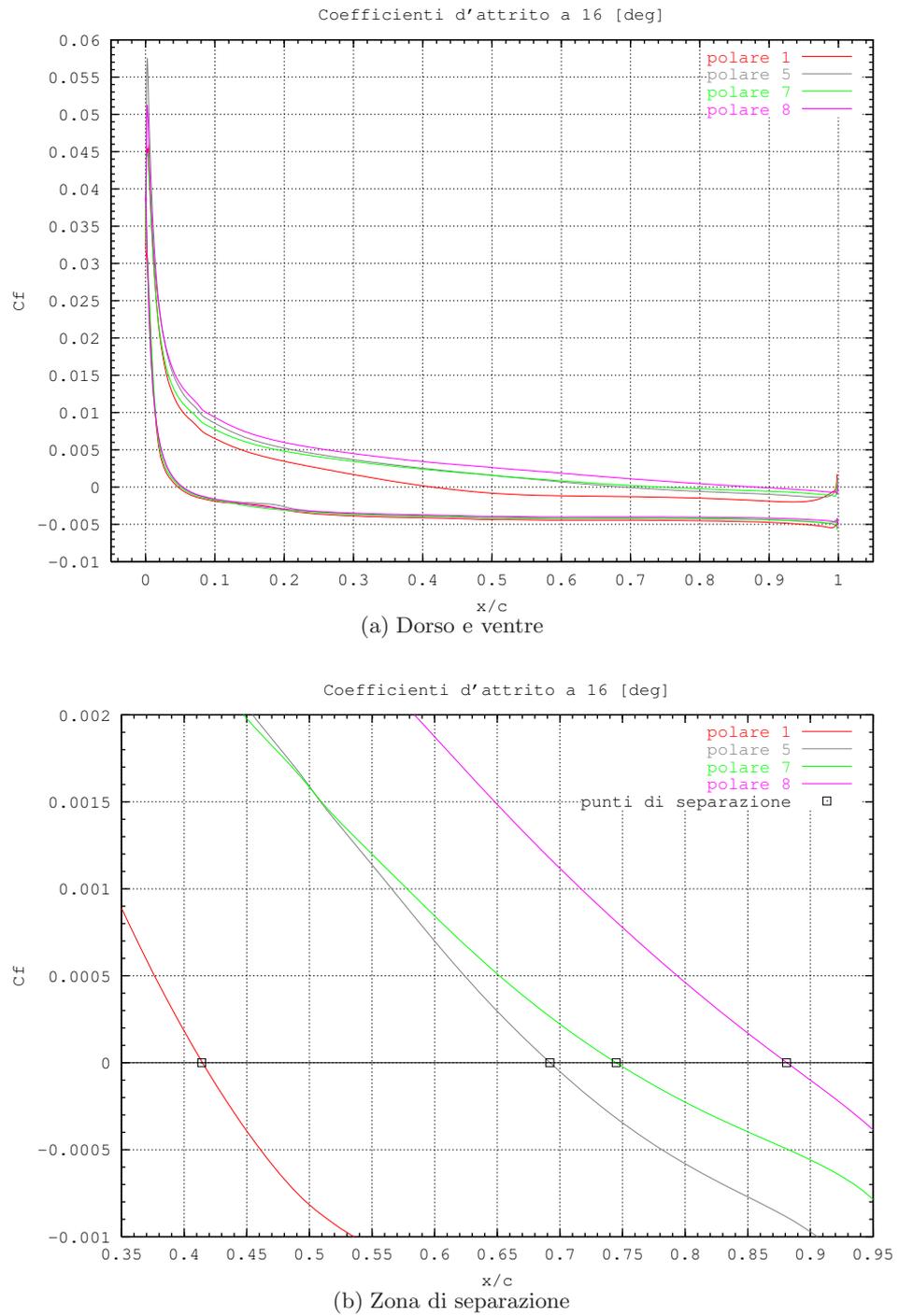


Figura III.42: Coefficienti di attrito (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras/ $k-\omega$ SST)

III. LE POLARI DEL NACA 0012

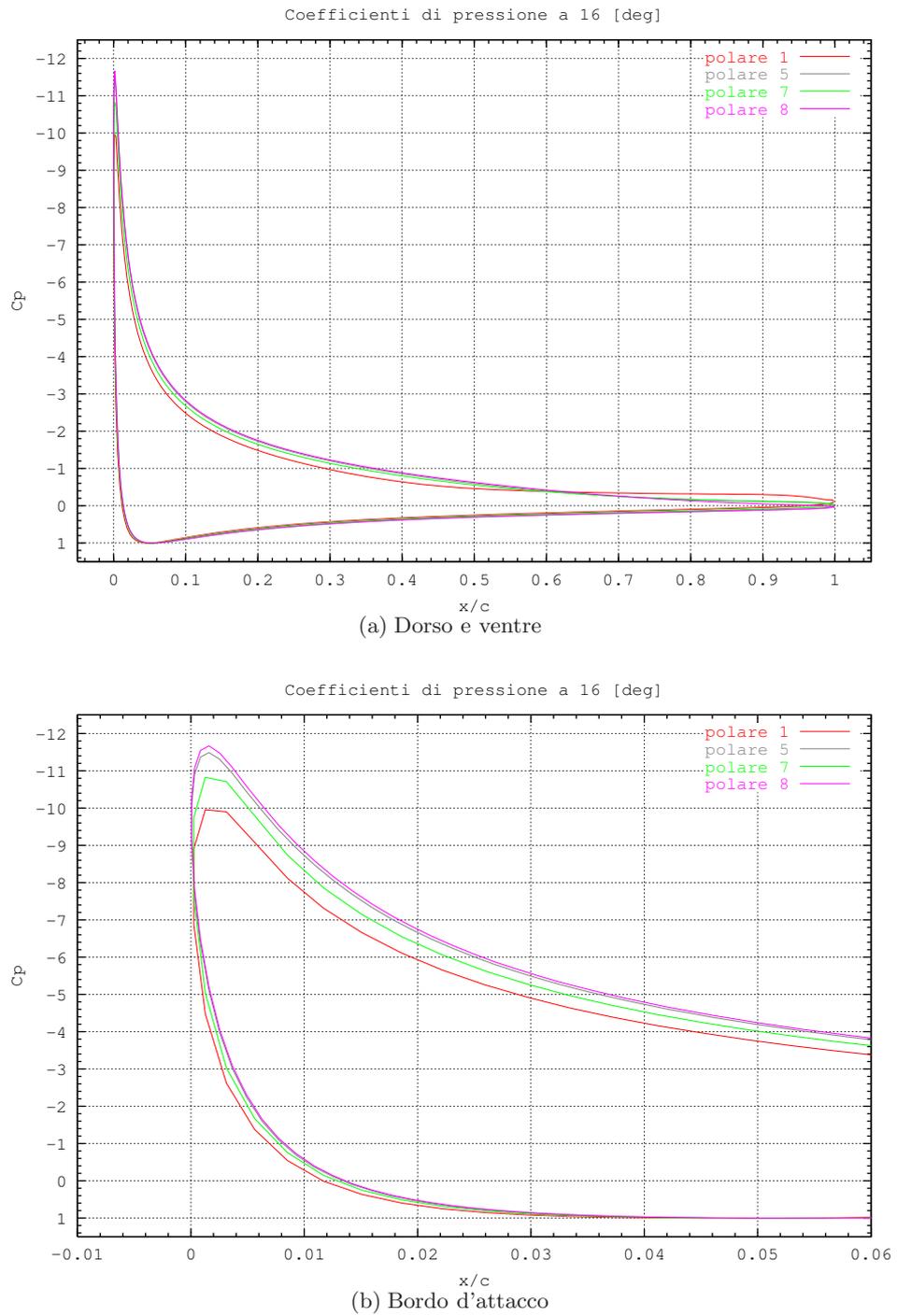


Figura III.43: Coefficienti di pressione (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras/ $k-\omega$ SST)

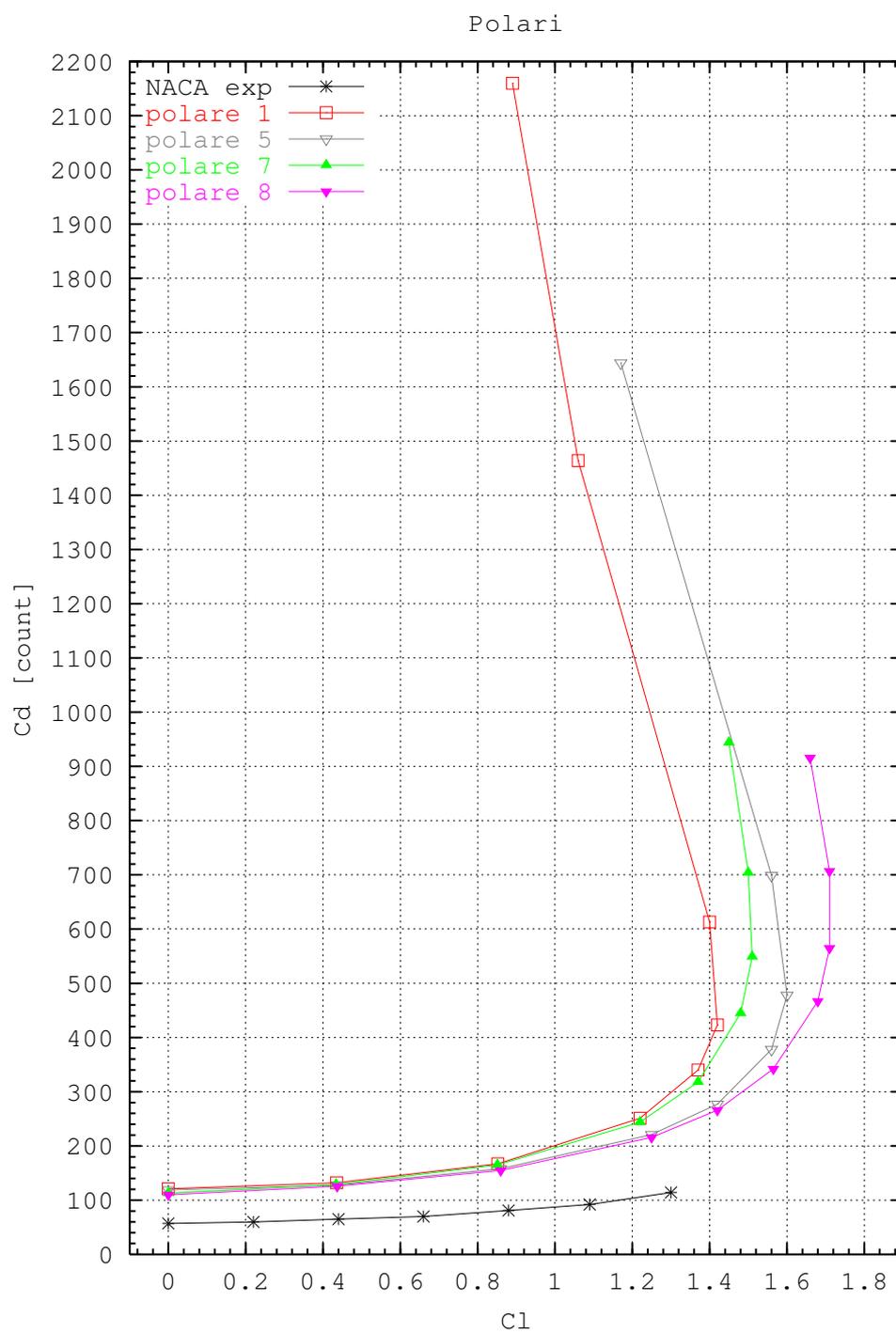


Figura III.44: Polari (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras/ $k-\omega$ SST)

III. LE POLARI DEL NACA 0012

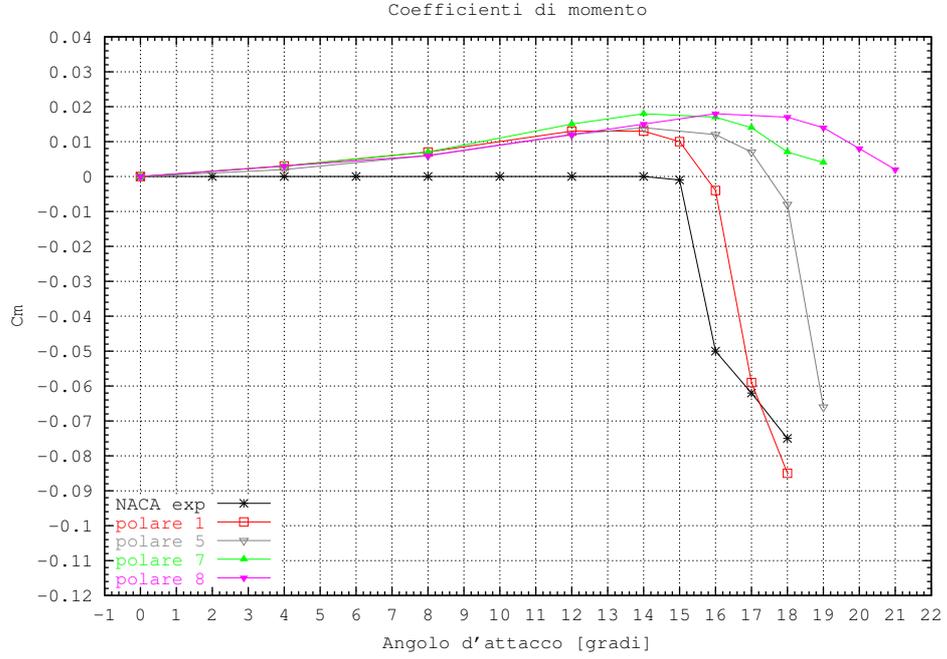


Figura III.45: Coefficienti di momento (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras/ $k-\omega$ SST)

polare 7			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	113	0.000
4°	0.434	129	0.003
8°	0.851	165	0.007
12°	1.22	244	0.015
14°	1.37	318	0.018
16°	1.48	378	0.017
17°	1.51	445	0.014
18°	1.50	704	0.007
19°	1.45*	944*	0.004*

polare 8			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	110	0.000
4°	0.436	126	0.003
8°	0.860	155	0.006
12°	1.25	216	0.012
14°	1.42	266	0.015
16°	1.57	342	0.018
18°	1.68	467	0.017
19°	1.71	565	0.014
20°	1.71	707	0.008
21°	1.66*	916*	0.002*

Tabella III.16: Risultati delle simulazioni (* valori medi a causa di oscillazioni periodiche)

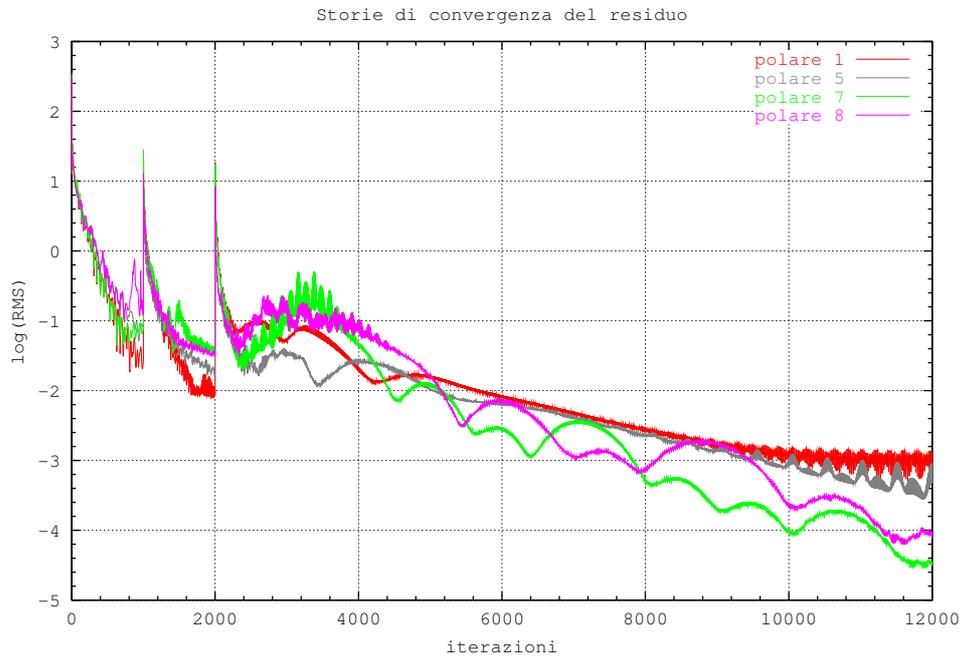


Figura III.46: Storie di convergenza del logaritmo del residuo (RMS) a C_l^{max}

III.4.9 Il confronto con FLUENT

FLUENT è un codice commerciale molto diffuso ed utilizzato per risolvere, tra gli altri, problemi di fluidodinamica esterna.

L'idea di poter impostare FLUENT per comprendere le capacità di questo codice nel simulare flussi di alta portanza e per effettuare un confronto con i risultati ottenuti con FLOSIM è apparsa subito molto interessante.

Il caso scelto per il confronto è stato quello di **polare 5** e dunque si è dovuta convertire la griglia *half super-fine* in un formato utile a FLUENT. Questa operazione è stata svolta utilizzando il grid-generator GAMBIT.

Già in questa fase si è operata una scelta importante perchè in FLUENT non è agevole l'imposizione dei punti di transizione da flusso laminare a flusso turbo-

lento dal momento che bisogna suddividere, fin dalla fase di generazione della griglia, il dominio di calcolo in zone destinate al laminare ed al turbolento. Si è dunque deciso di non dedicare tempo a questa operazione e di effettuare simulazioni fully turbulent, prendendo così spunto per ripetere anche con FLOSIIM il caso di **polare 5** in condizioni di flusso ovunque turbolento, senza imporre la transizione, per ottenere i risultati di **polare 5ft**. In questo modo si è ottenuta una semplificazione nel lavoro di conversione della griglia e si è anche potuto valutare l'effetto della scelta dei punti di transizione.

Per il resto si è impostato FLUENT cercando di ottenere i migliori risultati possibili. FLUENT si basa su uno schema upwind (I e II ordine) ed offre la possibilità di scegliere un solutore stazionario o instazionario, implicito o esplicito. In questo caso si è fatto uso dello schema implicito al II ordine (con numero di Courant pari a 100) e, fin quando è stato possibile (fino a 14°) dello stazionario, per poi passare all'instazionario nei casi più complessi.

Ma, prima di passare alle simulazioni sul profilo NACA-0012 si è preferito effettuare il test-case della lastra piana. Questo test-case potrebbe apparire banale ed inutile ed invece rappresenta una delle simulazioni più difficili da portare a convergenza e, soprattutto, un importante confronto con soluzioni analitiche. Per la lastra piana isobarica in campo incomprimibile infatti, si conosce la soluzione di Blasius, valida per un flusso laminare, che lega il C_f al numero di Reynolds locale ($Re_x = Re_\infty x/L_r$) secondo l'espressione:

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

III.4 I risultati numerici

mentre per il flusso turbolento sono note più soluzioni, tutte in buon accordo per numeri di Reynolds locali superiori a 500000 (valore indicato per la transizione), ed in particolare quella di Prandtl

$$C_f = 0.0576 \cdot Re_x^{-1/5}$$

Il test è stato condotto con i seguenti parametri:

Mach	Reynolds _∞	α
0.30	1.0x10 ⁶	0.0°

Tabella III.17: Parametri per il test-case della lastra piana

ed utilizzando la griglia riportata in figura III.47, le cui caratteristiche sono indicate in tabella III.18, già ampiamente testata in altri lavori e che aveva permesso di ottenere ottimi risultati [3, 9].

grid points totali	161x257=41216
grid points sul corpo	129
grid points in direzione normale al corpo	257

Tabella III.18: Caratteristiche della griglia utilizzata per il test-case della lastra piana

Come si può osservare dalla figura III.48, che diagramma in scala logaritmica gli andamenti del C_f in funzione del Reynolds locale, si sono ottenute due soluzioni completamente diverse nella zona di transizione. I due codici hanno mostrato un buon accordo quando raggiungono la curva turbolenta e quando si trovano nel tratto laminare ma, mentre FLUENT gestisce la transizione in maniera molto graduale FLOSIM mostra un salto più netto.

Eseguito questo test, utile anche per acquisire dimestichezza con FLUENT, si sono elaborate le due nuove polari.

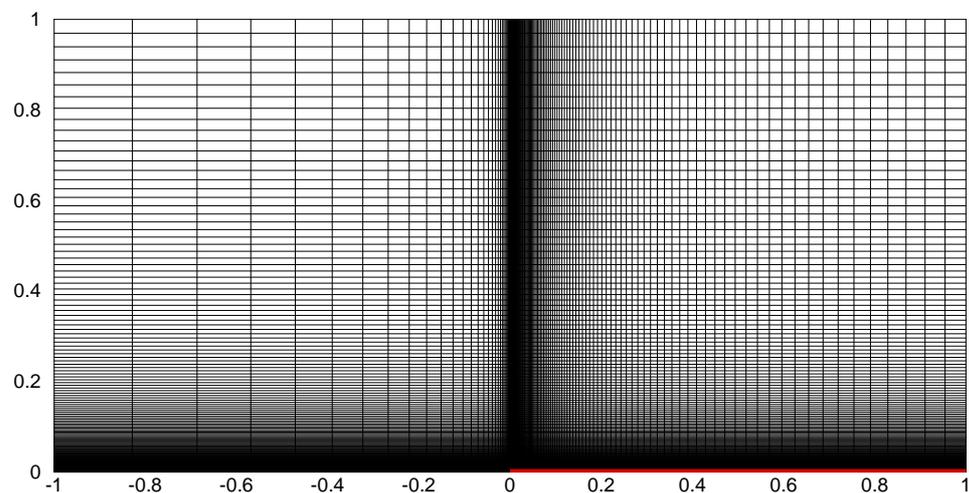


Figura III.47: Griglia utilizzata per il test-case della lastra piana

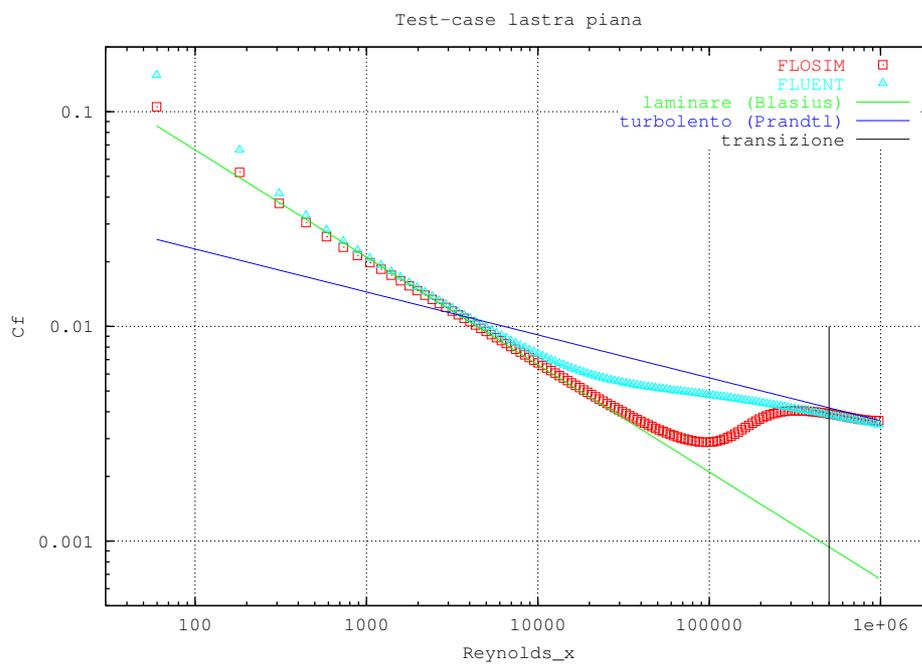


Figura III.48: Diagrammi del coefficiente d'attrito per la lastra piana

III.4 I risultati numerici

Il confronto tra **polare 5** e **polare 5ft** ha riportato differenze solo a partire da 15° . In particolare si è trovato un C_l^{max} più basso ed un'incidenza critica più piccola (fig. III.49) e ciò, dipende da una maggiore dissipatività deducibile dalla separazione anticipata (fig. III.50) e dal minore picco di espansione (fig. III.51).

Dal confronto con FLUENT si evince una minore dissipatività di questo codice che è riuscito a produrre un migliore gradiente della retta di portanza ma che ha anche posticipato lo stallo con un C_l^{max} decisamente più alto. Questa minore dissipatività ha comunque consentito di ridurre notevolmente i valori del C_d (fig. III.52) avvicinando la polare numerica a quella sperimentale.

polare 5ft			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	120	0.000
4°	0.437	128	0.002
8°	0.859	158	0.006
12°	1.25	222	0.012
14°	1.42	283	0.014
16°	1.54	402	0.011
17°	1.56	538	0.025
18°	1.42	952	-0.027
19°	1.08	1856	-0.076

FLUENT			
α	C_l	C_d	C_m
0°	0.000	80	0.000
4°	0.442	90	0.002
8°	0.872	123	0.004
12°	1.27	186	0.010
14°	1.45	236	0.015
16°	1.59	308	0.020
17°	1.63	356	0.023
18°	1.65	455	0.025
19°	1.48	698	0.014

Tabella III.19: Risultati delle simulazioni

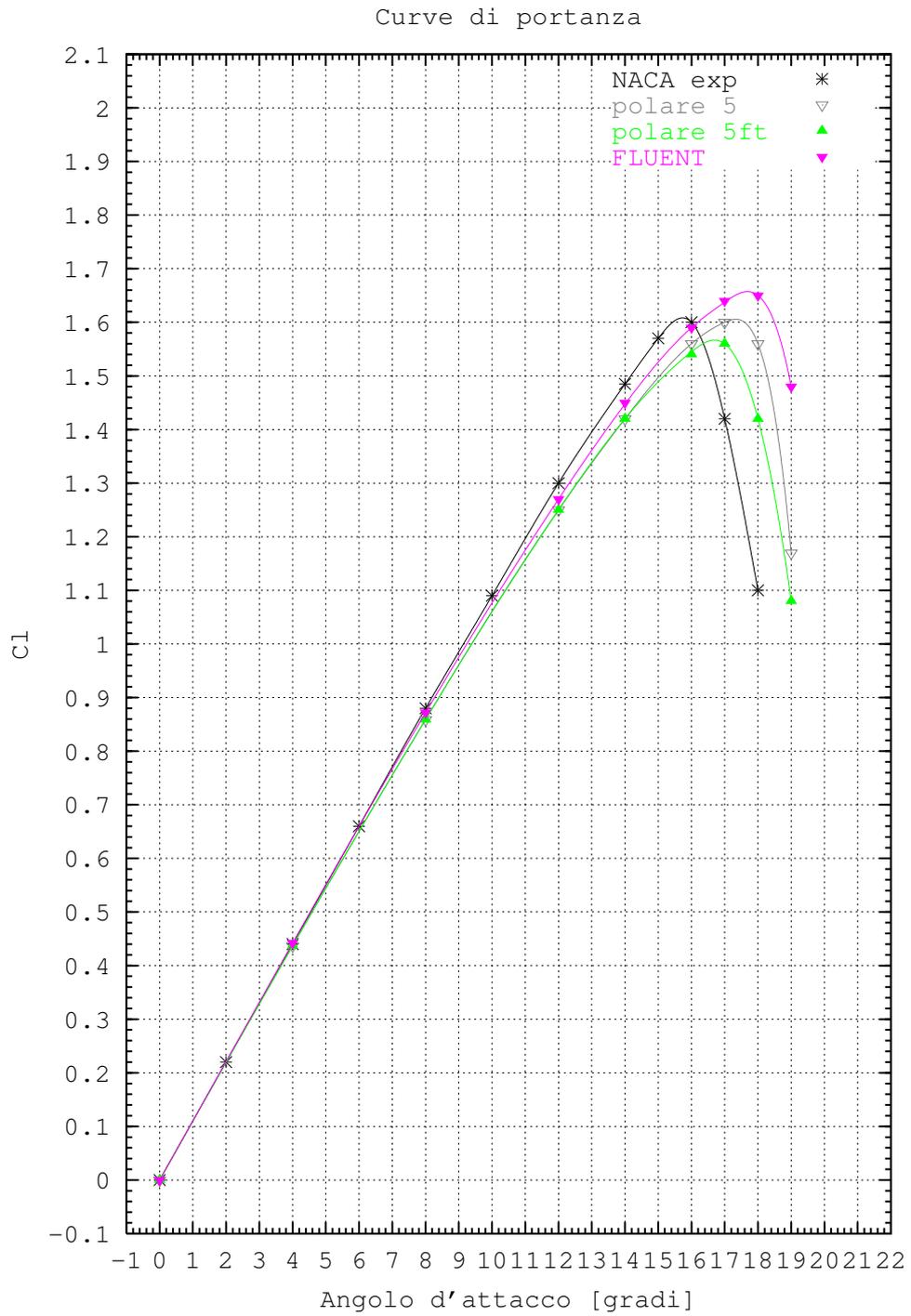


Figura III.49: Curve di portanza (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4 I risultati numerici

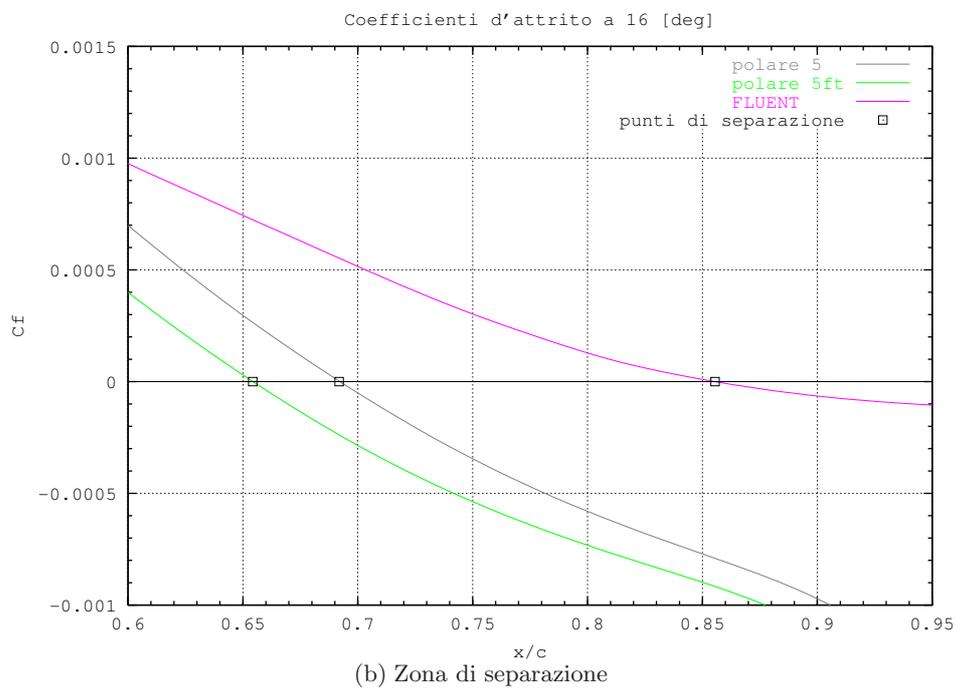
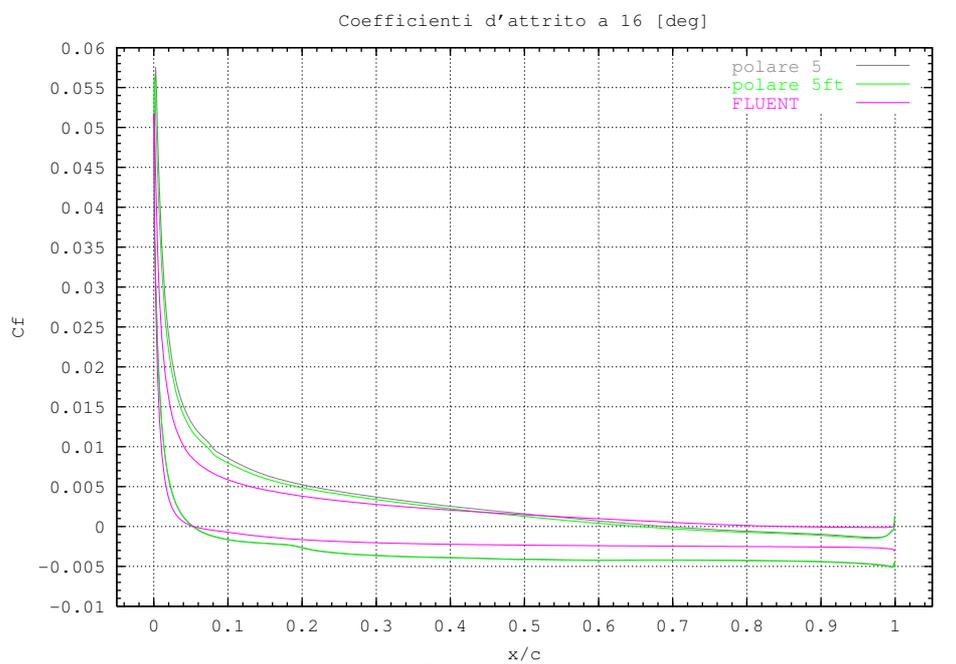


Figura III.50: Coefficienti di attrito (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III. LE POLARI DEL NACA 0012

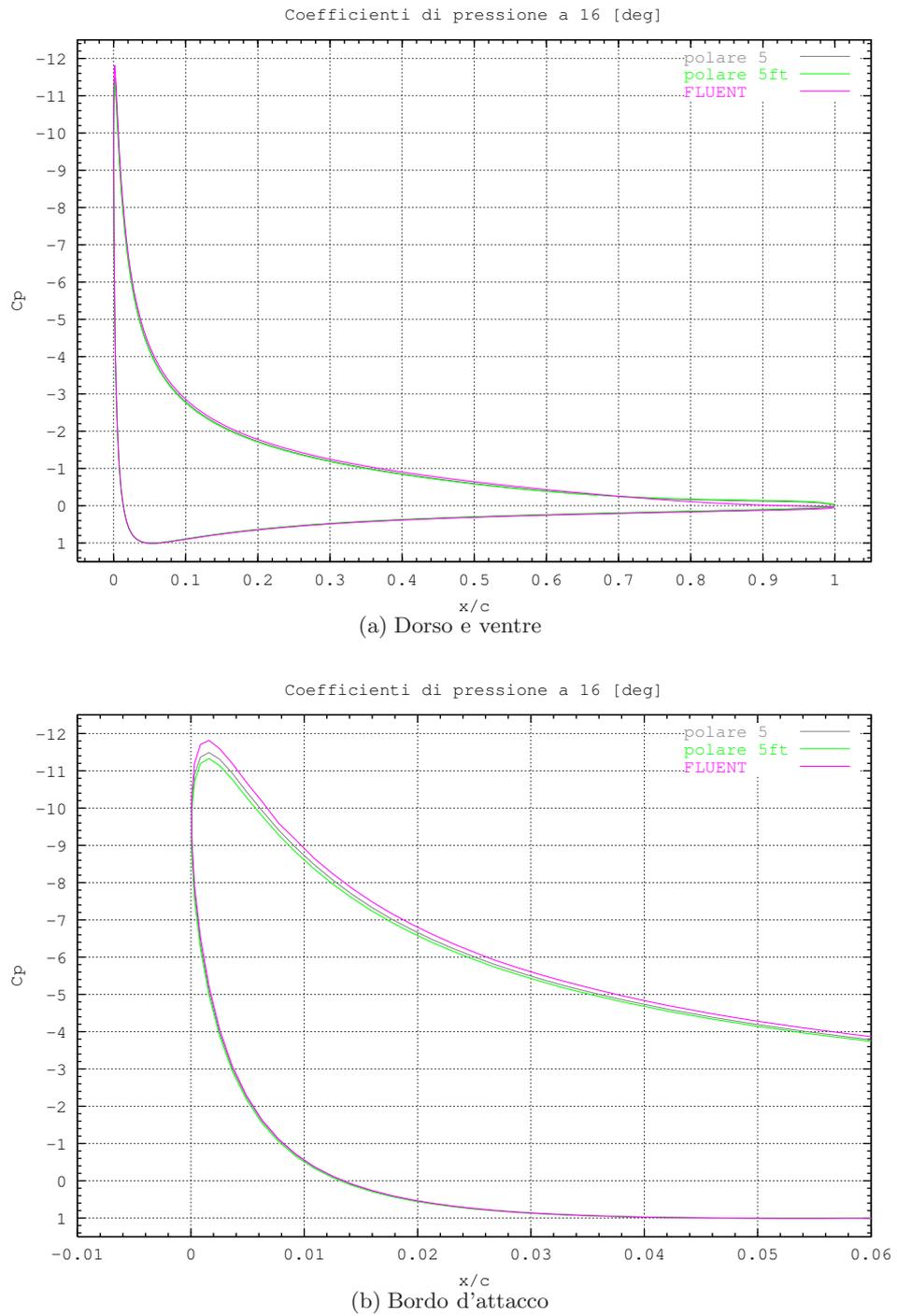


Figura III.51: Coefficienti di pressione (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

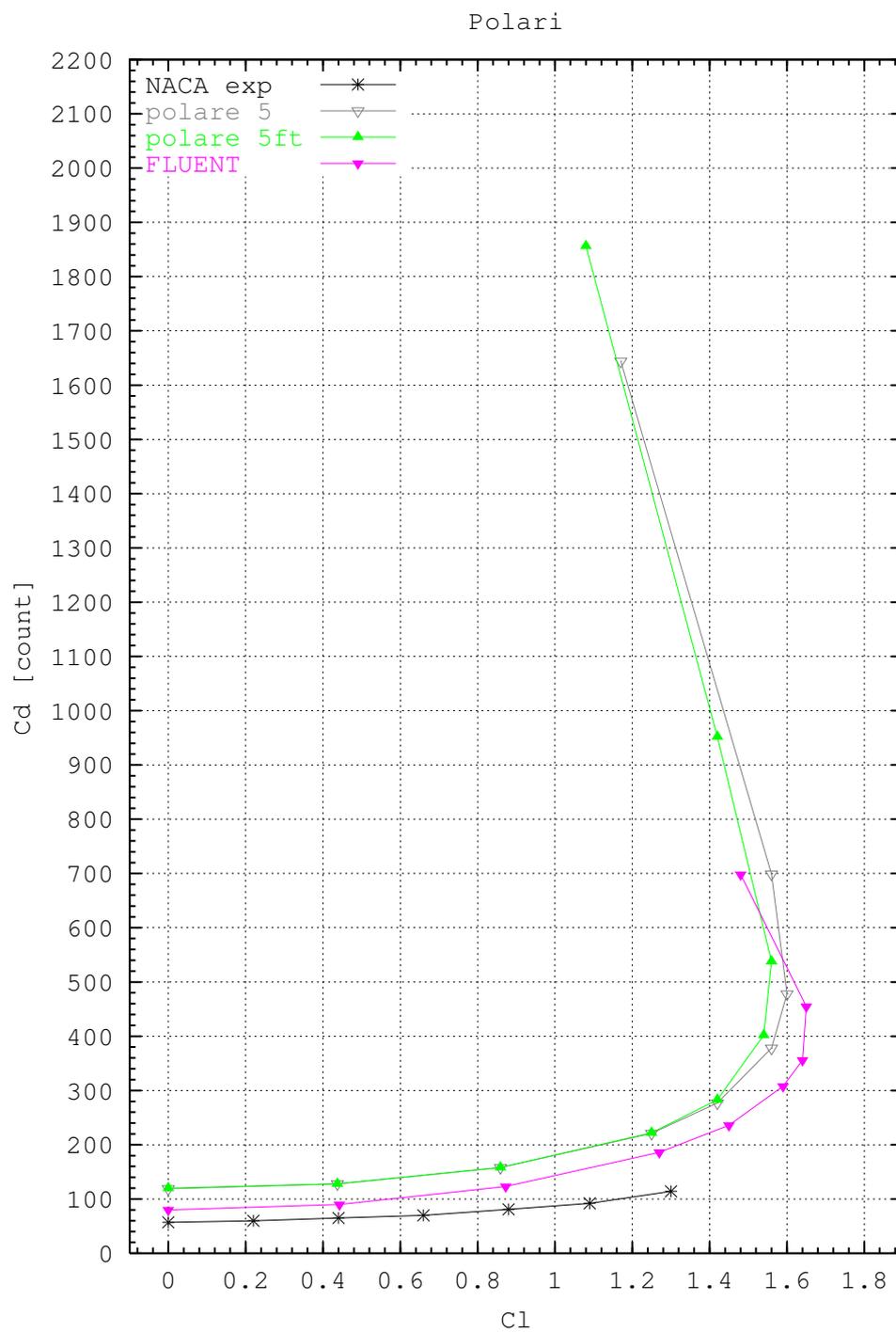


Figura III.52: Polari (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

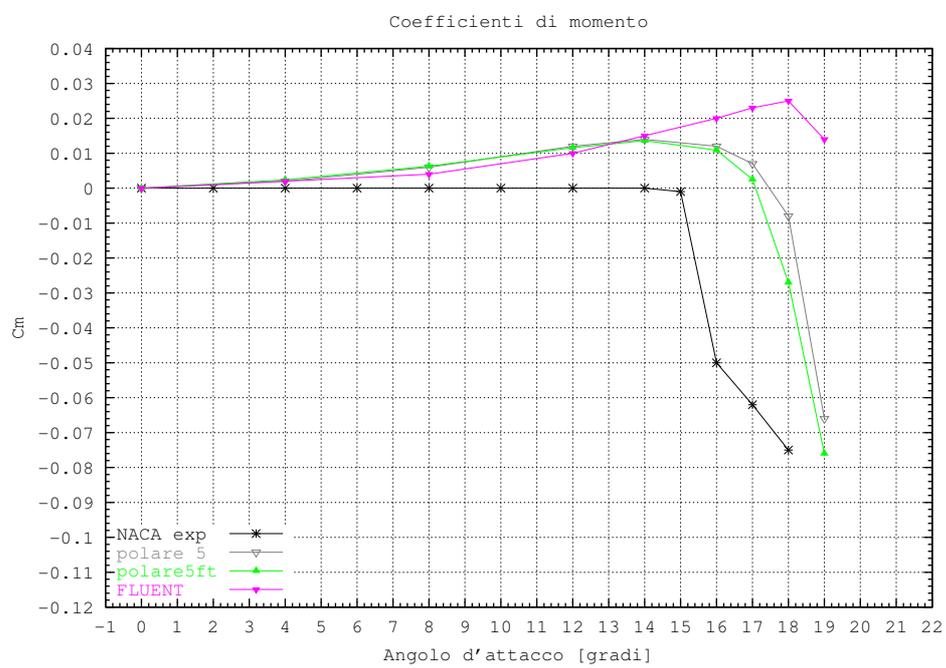


Figura III.53: Coefficienti di momento (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

III.4.10 L'effetto della griglia adattata

Come anticipato nel paragrafo III.1, la simmetria della griglia non asseconda l'andamento della scia alle alte incidenze. E' dunque lecito ipotizzare di trarre vantaggio dalla deformazione della griglia in modo che l'edge periodico tenti di seguire l'andamento della scia. Per valutare l'effetto della asimmetria si sono utilizzate le griglie adattate descritte nel paragrafo III.1 per ottenere il caso di **polare 5a** (da confrontare con **polare 5**).

Per questo nuovo caso è sufficiente riportare il confronto delle polari (fig. III.55) perchè la modifica apportata (si può sempre pensare di alterare la scia con altre curve) non ha prodotto alcuna variazione nei coefficienti aerodinamici già descritti per il caso simmetrico.

III. LE POLARI DEL NACA 0012

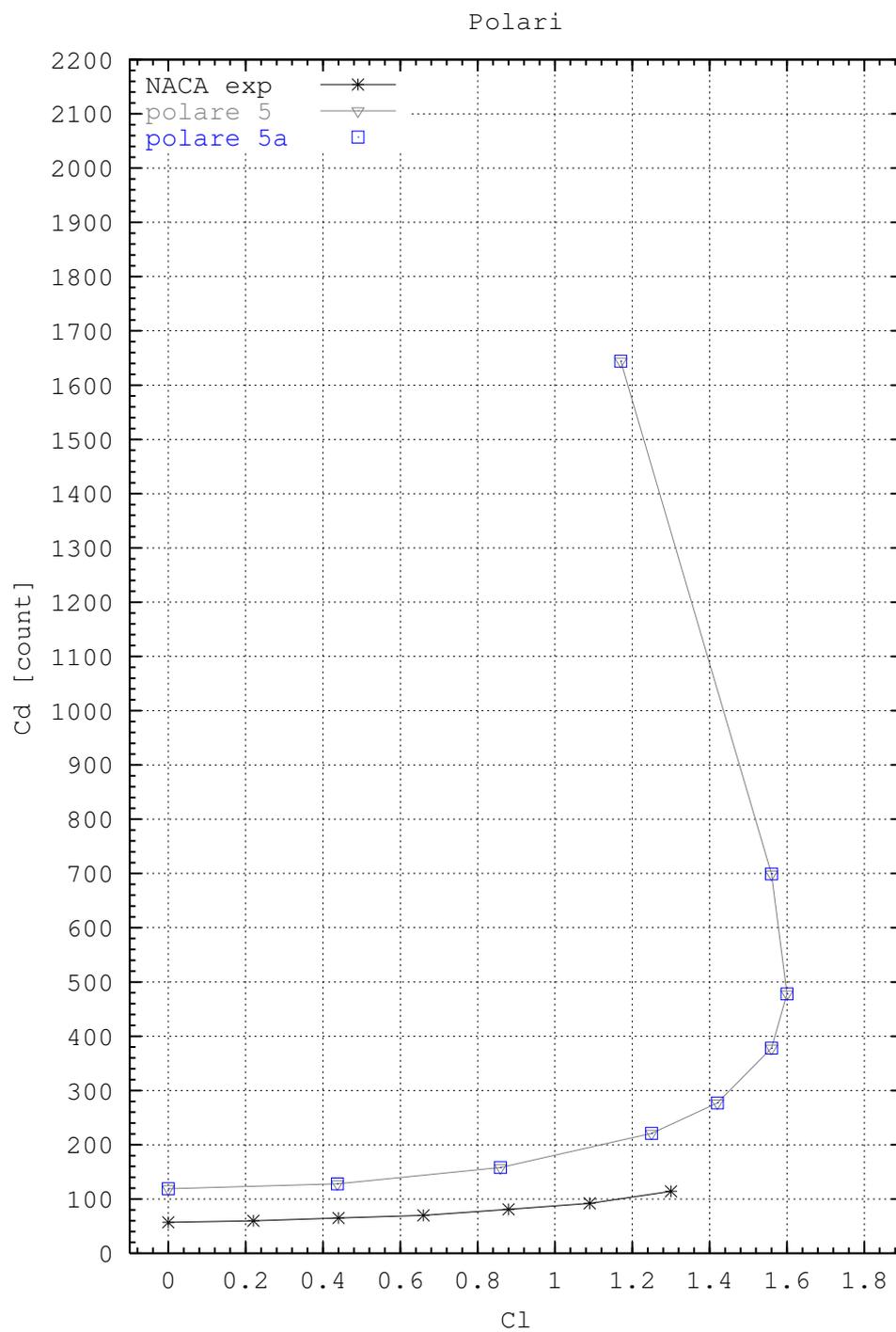


Figura III.54: Polari (NACA 0012, $M=0.15$, $Re=9.0E+6$, Spalart-Allmaras)

Capitolo IV

IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

IV.1 Presentazione del test-case

Nel gennaio 1979 il National Aerospace Laboratory (NLR)¹ ha svolto prove in galleria sul profilo flappato NLR 7301 [31]. I test hanno previsto due diverse configurazioni determinate dal gap tra il main-component ed il flap (in figura IV.1 è mostrata la configurazione con gap al 2.6% utilizzata per questo test-case) e come risultati hanno prodotto curve di portanza e di momento e per tre incidenze (6.0° , 10.1° , 13.1°) anche le distribuzioni di pressione, alcuni valori del coefficiente d'attrito ed informazioni relative ai punti di transizione ed alla zona dove è stata visualizzata la presenza di una bolla laminare.

Nelle due tabelle seguenti sono riportati i dati più importanti ricavati dalle prove in galleria.

Per questa geometria sono inoltre disponibili i risultati delle prove numeriche

¹Nationaal Lucht- En Ruimtevaartlaboratorium (centro ricerche olandese)

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

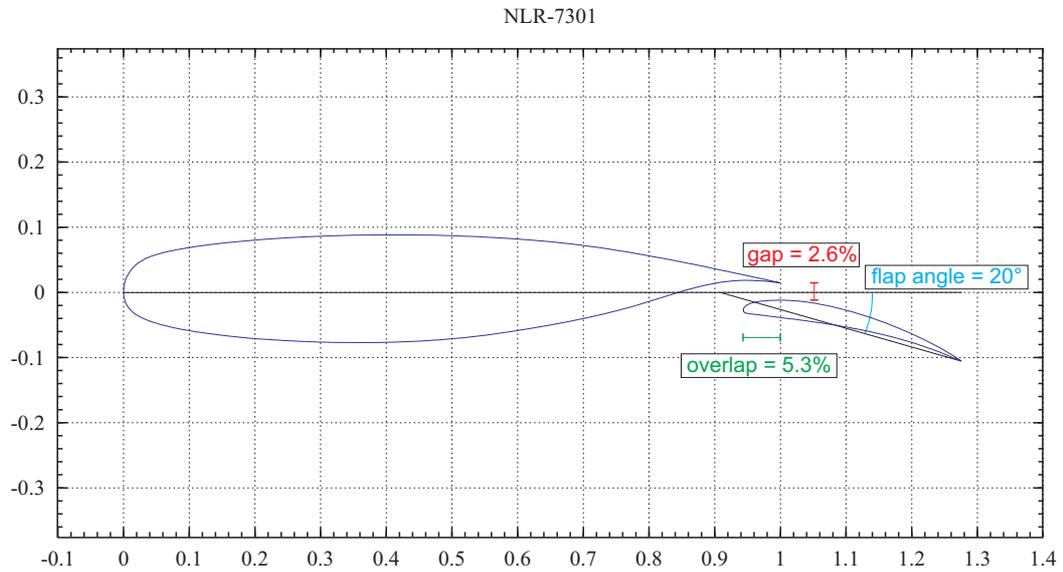


Figura IV.1: Geometria del profilo NLR-7301

Mach	Reynolds	α	C_l	C_d^*	C_m
0.185	2.51×10^6	6.0°	2.416	229	-0.471
0.185	2.51×10^6	10.1°	2.877	323	-0.463
0.185	2.51×10^6	13.1°	3.141	445	-0.440

Tabella IV.1: Coefficienti aerodinamici sperimentali (* espresso in count)

	6.0°	10.1°	13.1°
Separazione laminare (main upper surface)	2.7%	2.5%	2.4%
Riattacco turbolento (main upper surface)	4.0%	3.7%	3.5%
Transizione (main lower surface)	65.0 - 68.0%	69.5 - 72.5%	71.0 - 74.0%
Transizione (flap lower surface)	19.4 - 20.6%	18.2 - 19.6%	16.8 - 18.3%

Tabella IV.2: Risultati sperimentali della visualizzazione del flusso

IV.1 Presentazione del test-case

svolte al CIRA ² nel 1994 [2] utilizzando il codice ENSOLV (Euler Navier-Stokes Solver), in parte simile a FLOSIM, con l'accoppiamento del modello di turbolenza di Baldwin-Lomax.

Una delle griglie utilizzate dal CIRA è stata anche utilizzata per le simulazioni riportate in questo capitolo. La griglia (illustrata nelle figure IV.2 e IV.3) è composta da 129920 celle distribuite in 29 blocchi delimitati da 69 edge (di cui 51 sono pareti interne). Il far-field è posizionato a 10 corde dal corpo, il main-component è discretizzato con 288 grid-points mentre il flap è discretizzato con 272 grid-points.

²Centro Italiano Ricerche Aerospaziali

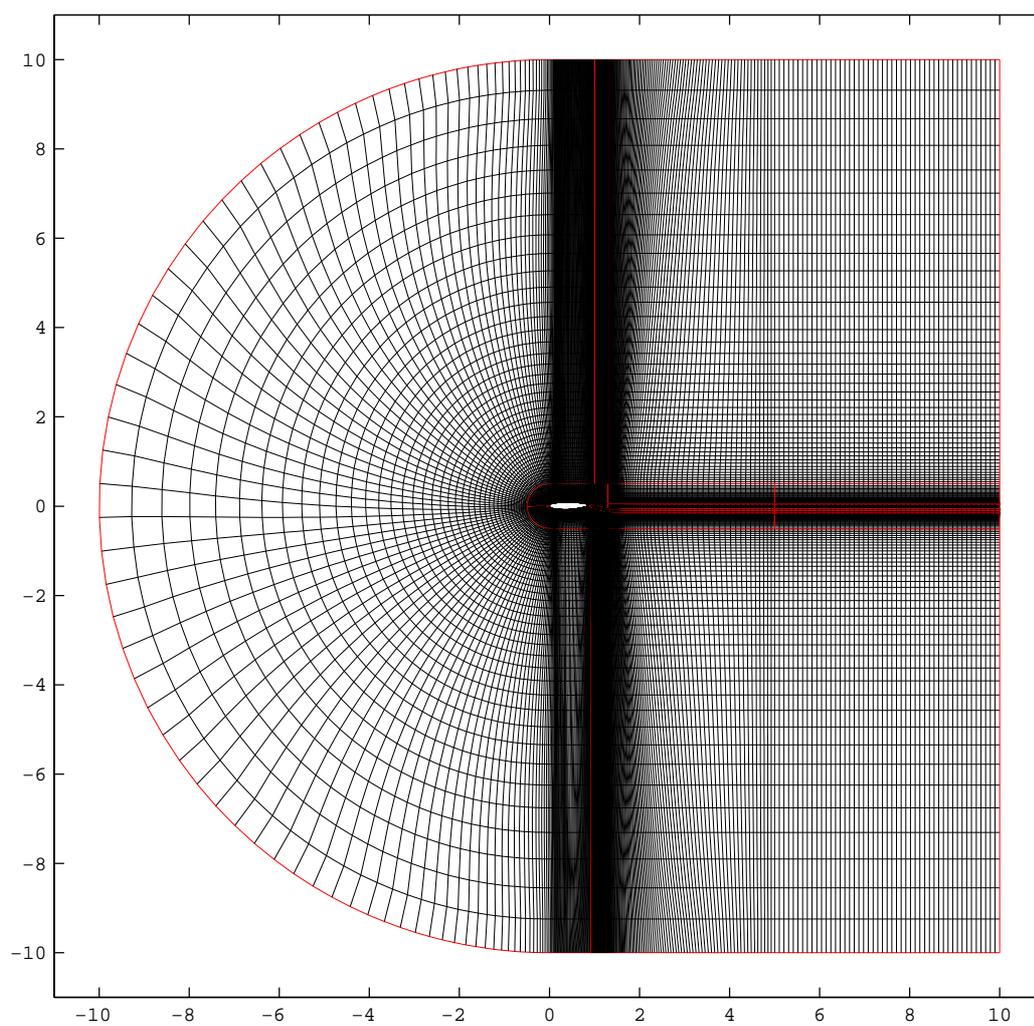


Figura IV.2: Vista complessiva della griglia

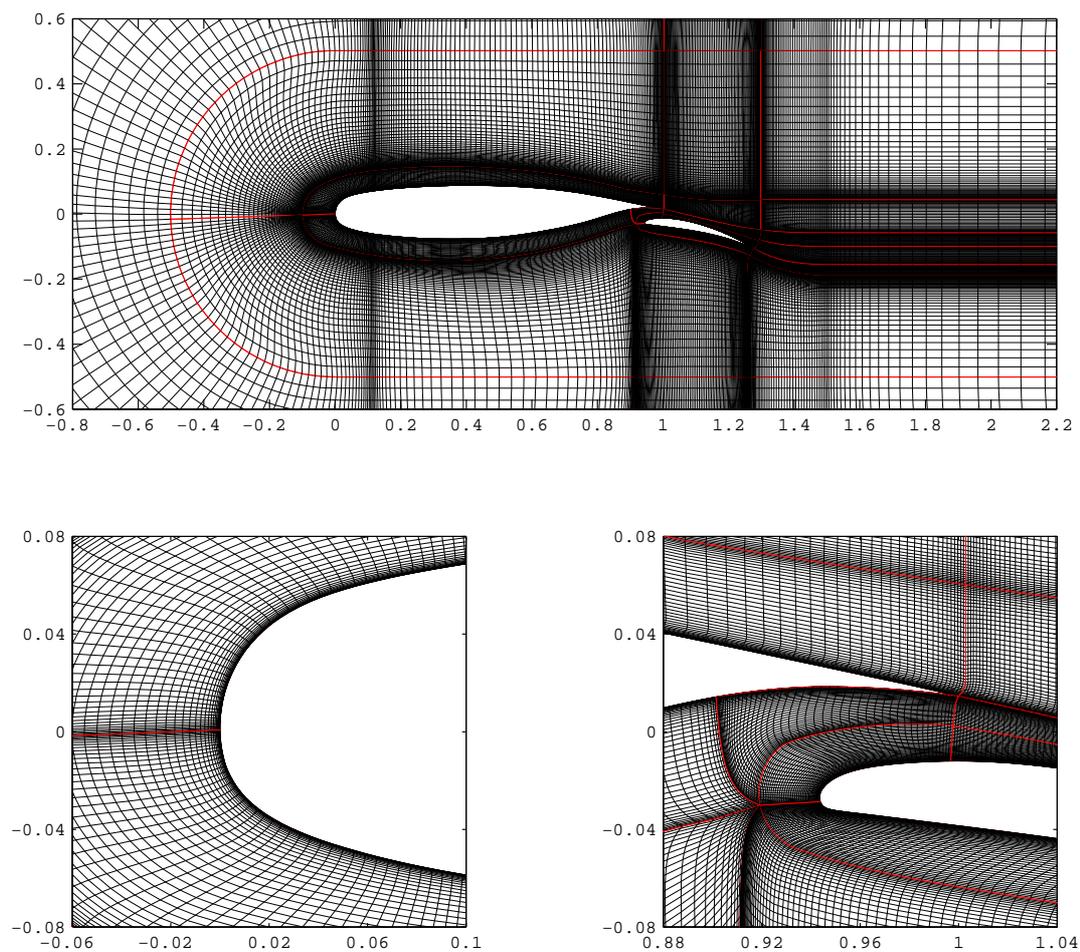


Figura IV.3: Particolari della griglia

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

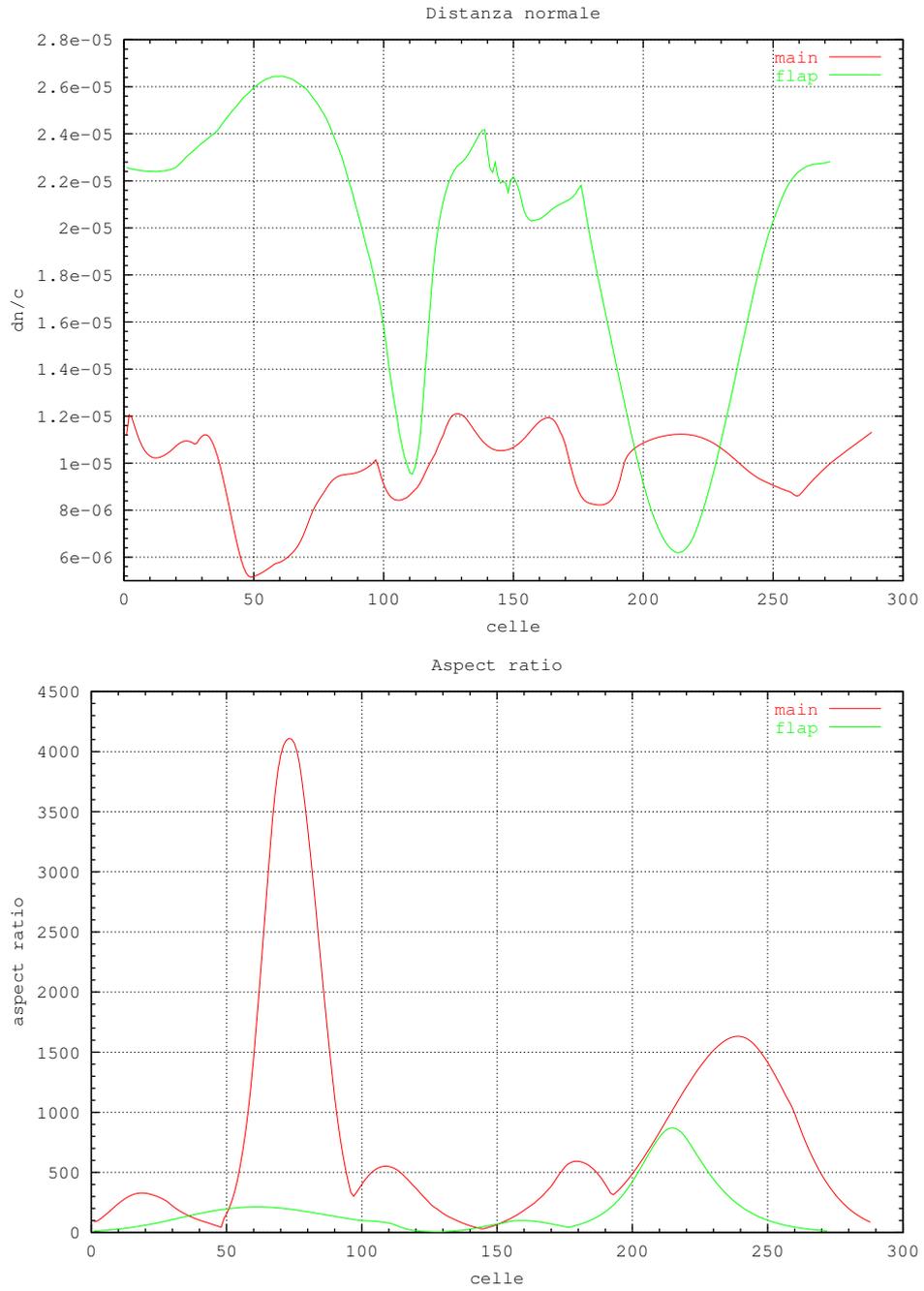


Figura IV.4: Distanza normale ed aspect-ratio della griglia

IV.2 La convalida dello schema multiblocco

Prima di affrontare le simulazioni su un profilo multicomponente è stato necessario verificare che lo schema multiblocco fosse efficiente. Si è così deciso di confrontare i risultati ottenuti con due simulazioni uguali tranne che per il numero di blocchi in cui era suddivisa la griglia (nel caso in esame si è utilizzata la griglia *fine* per il profilo NACA 0012 in versione monoblocco ed in versione con 5 blocchi), con le seguenti principali caratteristiche:

Mach	Reynolds	α	$\kappa^{(4)}$
0.15	9.0×10^6	14°	1.5

Tabella IV.3: Parametri utilizzati per il test di convalida dello schema multiblocco

Come si può vedere dai grafici di figura IV.5, si sono correttamente ottenute due soluzioni sovrapponibili in termini di C_p e C_f mentre la convergenza è risultata un pò degradata dalla frammentazione in blocchi (fig. IV.6).

Questa prova è servita anche per mettere in risalto l'effetto dovuto alla presenza di numerose pareti interne. La parete interna rappresenta infatti una sorta di congelamento delle condizioni al contorno globali e ciò rende più delicata la stabilità numerica. Per contenere questo effetto destabilizzante è stato necessario utilizzare $\kappa^{(4)}=1.5$ (piuttosto che 1.0 come fatto in precedenza) ed abbassare la frequenza di Coarse Grid Corrections all'interno del ciclo multi-grid passando da 1:4 nel caso monoblocco ad 1:10 nel caso multiblocco.

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

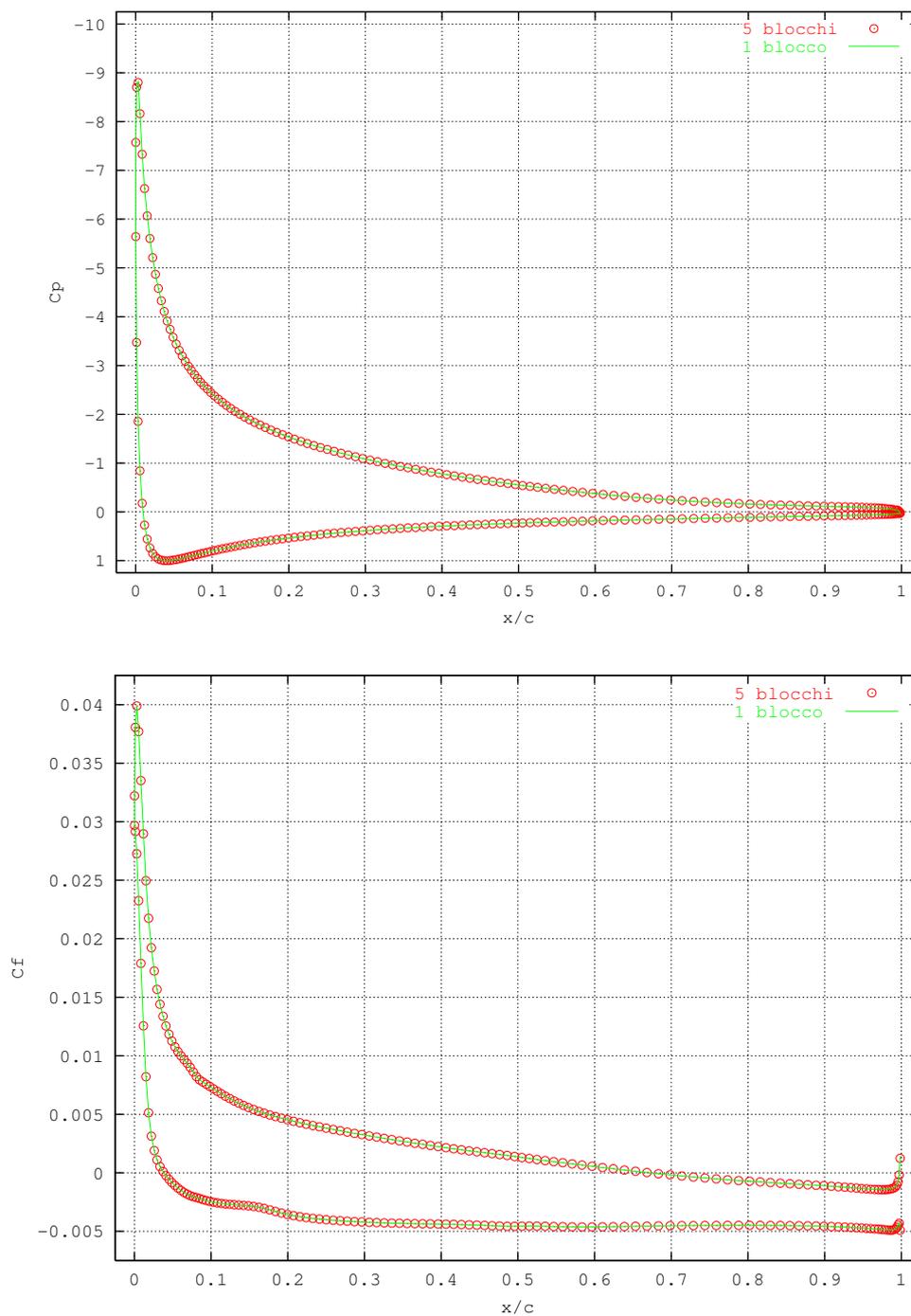


Figura IV.5: Confronto per il C_p ed il C_f tra griglia monoblocco e griglia multiblocco

IV.2 La convalida dello schema multiblocco

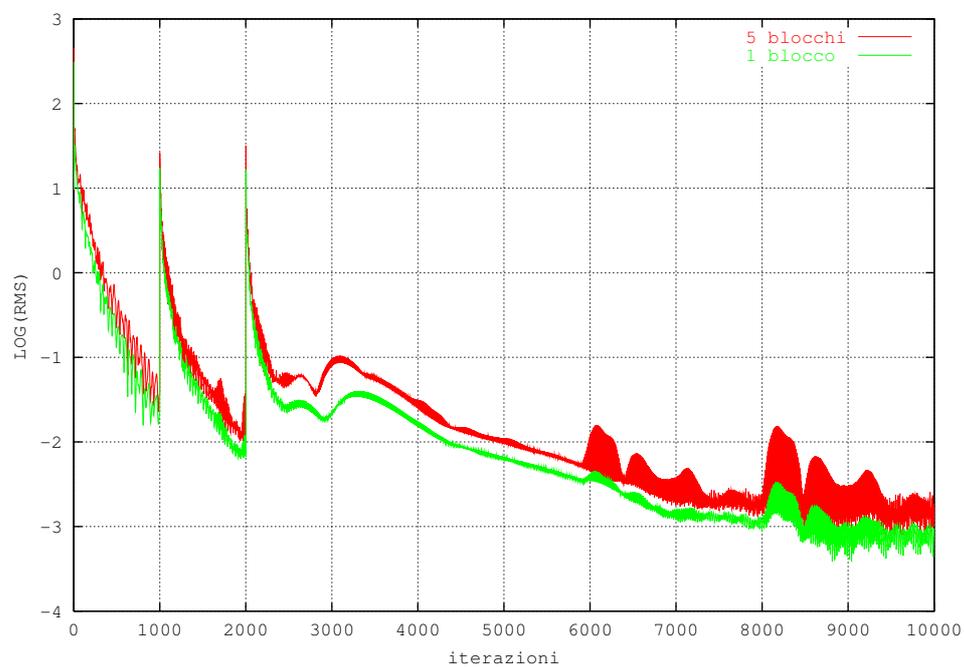


Figura IV.6: Confronto per il residuo tra griglia monoblocco e griglia multiblocco

IV.3 Le prove numeriche

Ottenuta la convalida del codice si è potuti passare alle prove numeriche.

Si sono svolte prove alle tre incidenze per le quali si disponeva di maggiori dettagli e per quelle necessarie a completare la curva di portanza utilizzando i seguenti parametri:

Mach	Reynolds	$k^{(4)}$	livelli di griglia	multigrid	modello di turbolenza
0.185	2.51×10^6	1.5	3	5-1-5	Spalart-Allmaras

Tabella IV.4: Parametri utilizzati per i test-case

I punti di transizione sono stati fissati solo sul main-component e, mentre per la transizione sul ventre è bastato seguire le indicazioni delle prove sperimentali, per il dorso è stato necessario prestare maggiore attenzione.

Il primo test è stato condotto ad $\alpha = 6.0$, con $CFL=1.4$ e $CFL_{turb}=2.0$ ed il punto di transizione sul dorso è stato imposto al 3% della corda, come fatto dal CIRA e come sarebbe stato giusto fare leggendo la tabella IV.2. In figura IV.7 sono riportati i grafici di C_p e C_f relativi a questo test con il confronto con i dati sperimentali e con i risultati del CIRA. Per le pressioni si nota solo una differenza in prossimità del picco di espansione che risulta più basso di quello sperimentale mentre per i C_f ci sono differenze sensibilmente più accentuate. La diminuzione del coefficiente d'attrito osservata sul bordo d'attacco ha indotto poi a pensare che si potesse cogliere la bolla laminare (trovata spe-

IV.3 Le prove numeriche

rimentalmente) semplicemente posticipando il punto di transizione sul dorso; mantenere un flusso laminare per un tratto più lungo può provocare la formazione di una bolla laminare. Per riuscire ad ottenere questo risultato è stato necessario imporre la transizione sul dorso al 7% della corda. Così facendo si sono ottenuti i risultati riportati in figura IV.8. Il campo di pressione non è variato apprezzabilmente ma dall'andamento del C_f si deduce la presenza della bolla laminare sul bordo d'attacco.

Un test analogo è stato svolto a 10.1° con transizione sul dorso al 3%. In questo caso però si è dovuto portare il CFL_{turb} ad 1.4 per motivi di stabilità numerica (fig. IV.9).

Posticipare eccessivamente la transizione con la presenza di un elevato picco di espansione può portare all'instabilità. Sul ventre è stato possibile portare la transizione ben oltre la metà del main-component solo grazie alla presenza di moderati gradienti di pressione.

Infatti, a 13.1° (sempre con transizione al 3%) la convergenza si è avuta con $CFL=1.2$ e $CFL_{turb}=1.2$ (fig. IV.10) mentre a 14.1° e 15.1° si è anche dovuto passare ad uno schema upwind al I ordine per la risoluzione dell'equazione della turbolenza e simulare in condizioni fully-turbulent.

In figura IV.11 sono riportate le curve di portanza sperimentali e numerica.

Sono presenti due curve sperimentali perchè si ritiene utile il confronto con i valori di C_l che appaiono maggiormente congruenti ai diagrammi di C_p (curva denominata *no data reduction*) e quelli invece corretti per motivi di bloccaggio solido e di scia della galleria (per maggiori dettagli si consulti il report NLR

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

[31] confrontando i risultati di tabella IV.5). Ciò dimostra come anche le prove in galleria presentino difficoltà non trascurabili.

α	C_l	C_d^*	C_m
0.0°	1.63	246	-0.464
6° (3%)	2.46	411	-0.551
6° (7%)	2.47	398	-0.553
10.1°	2.97	560	-0.559
13.1°	3.30	704	-0.554
14.1°	2.74	2725	-0.503
15.1°	2.71	2978	-0.496

Tabella IV.5: Risultati dei test (* espresso in count)

Per quanto riguarda la storia di convergenza e l'andamento dell' y^+ si riportano in figura IV.12 i grafici relativi al test condotto a 6.0° e con transizione sul dorso fissata al 3%.

Ed infine l'immagine relativa al caso a 13.1° (fig. IV.13) dalla quale si deduce l'accelerazione che il flusso subisce nel passare nel canale tra il main-component ed il flap, una sorta di ugello convergente.

IV.3 Le prove nuemriche

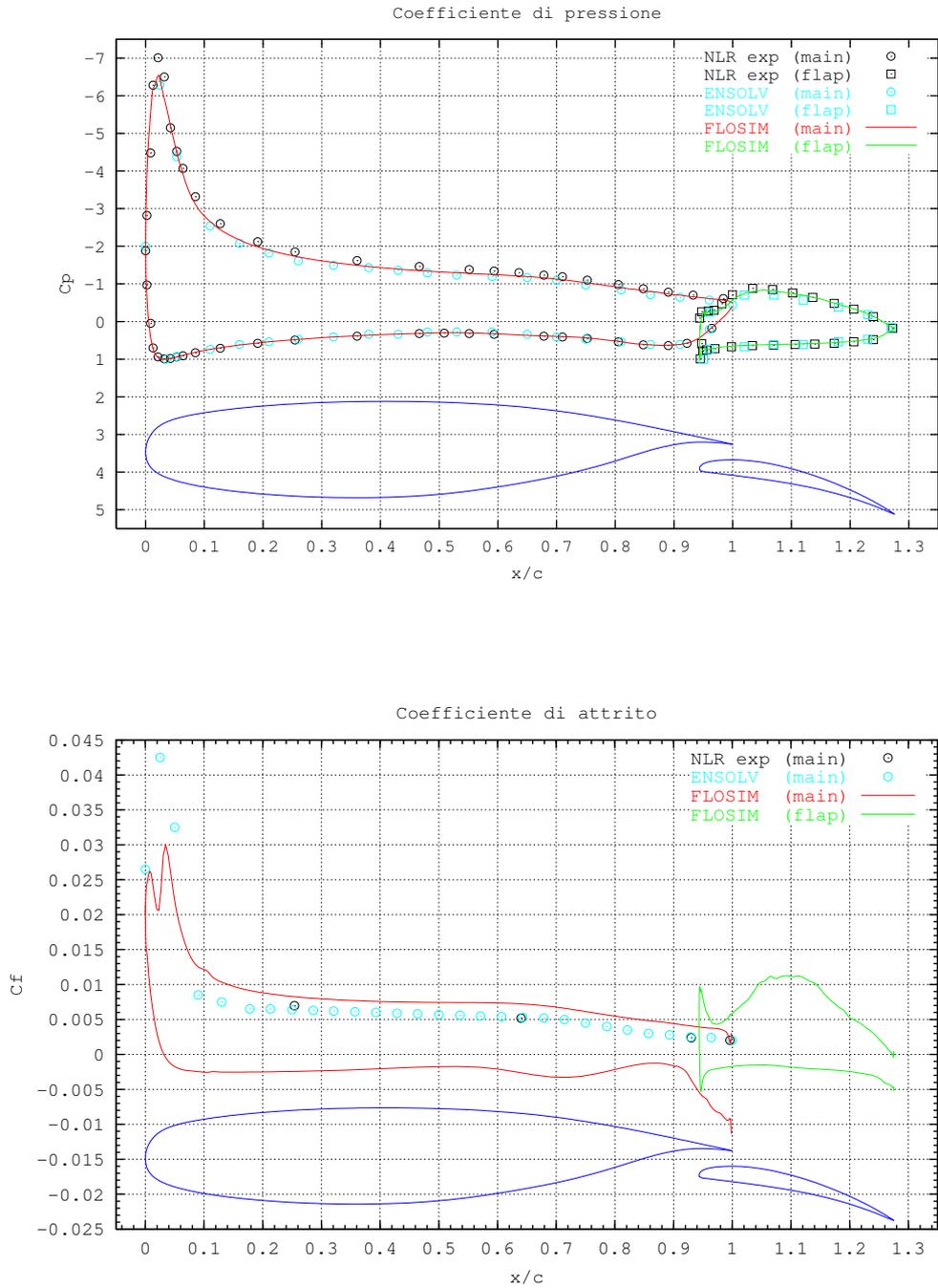


Figura IV.7: Coefficienti di pressione e di attrito ($\alpha = 6.0$, transizione sul dorso al 3% della corda)

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

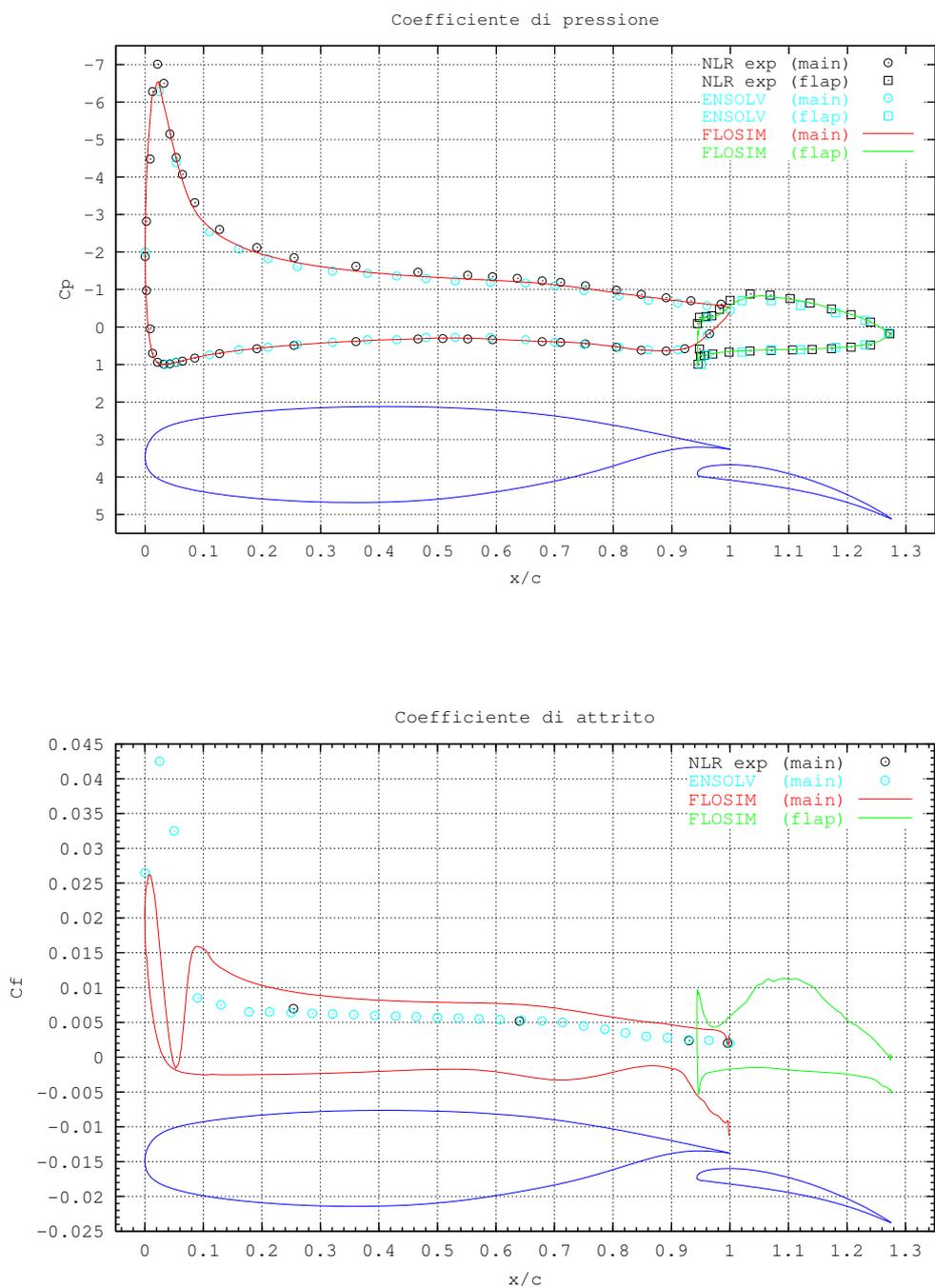


Figura IV.8: Coefficienti di pressione e di attrito ($\alpha = 6.0$, transizione sul dorso al 7% della corda)

IV.3 Le prove nuemriche

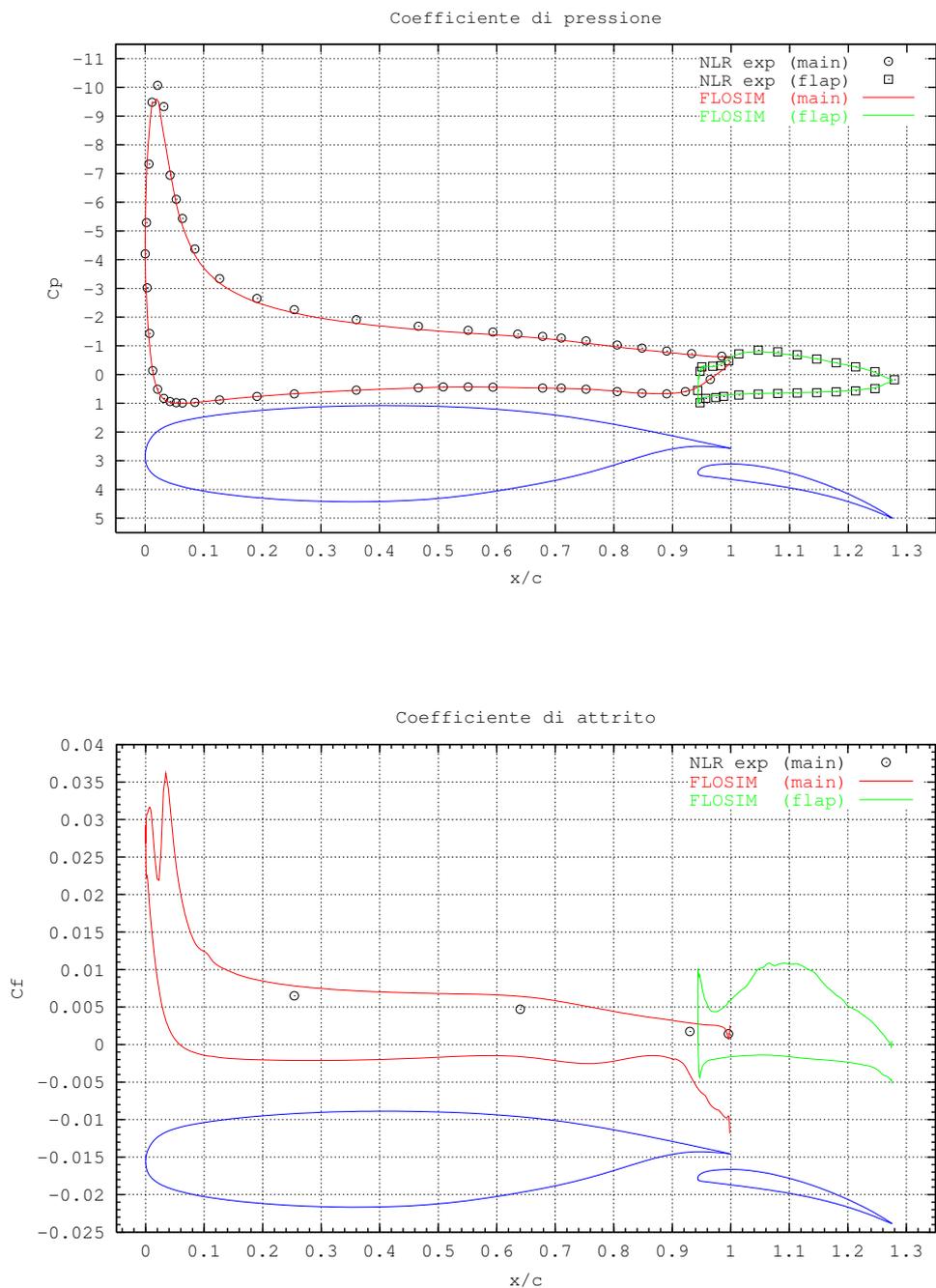


Figura IV.9: Coefficienti di pressione e di attrito ($\alpha = 10.1$, transizione sul dorso al 3% della corda)

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

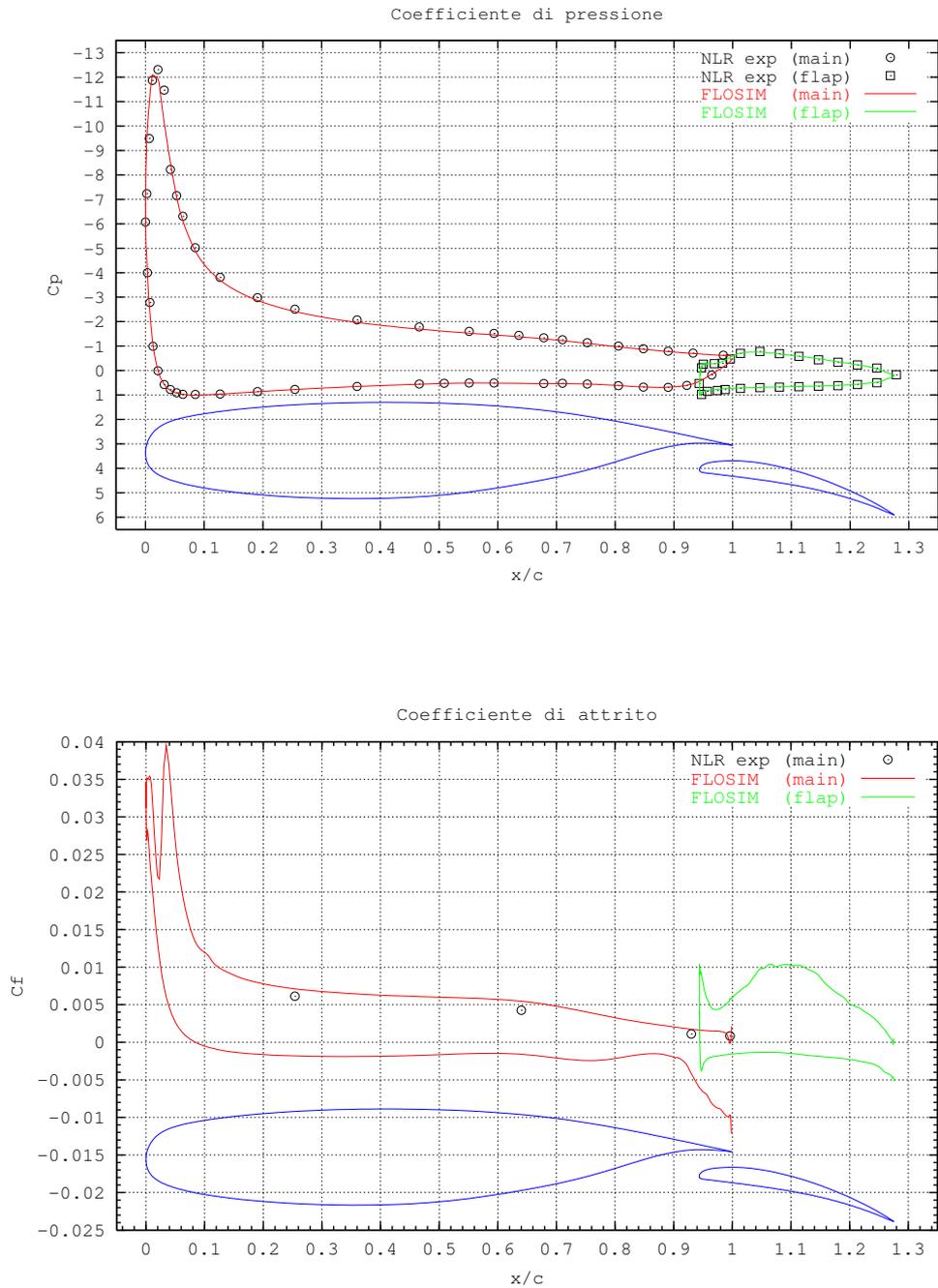


Figura IV.10: Coefficienti di pressione e di attrito ($\alpha = 13.1$, transizione sul dorso al 3% della corda)

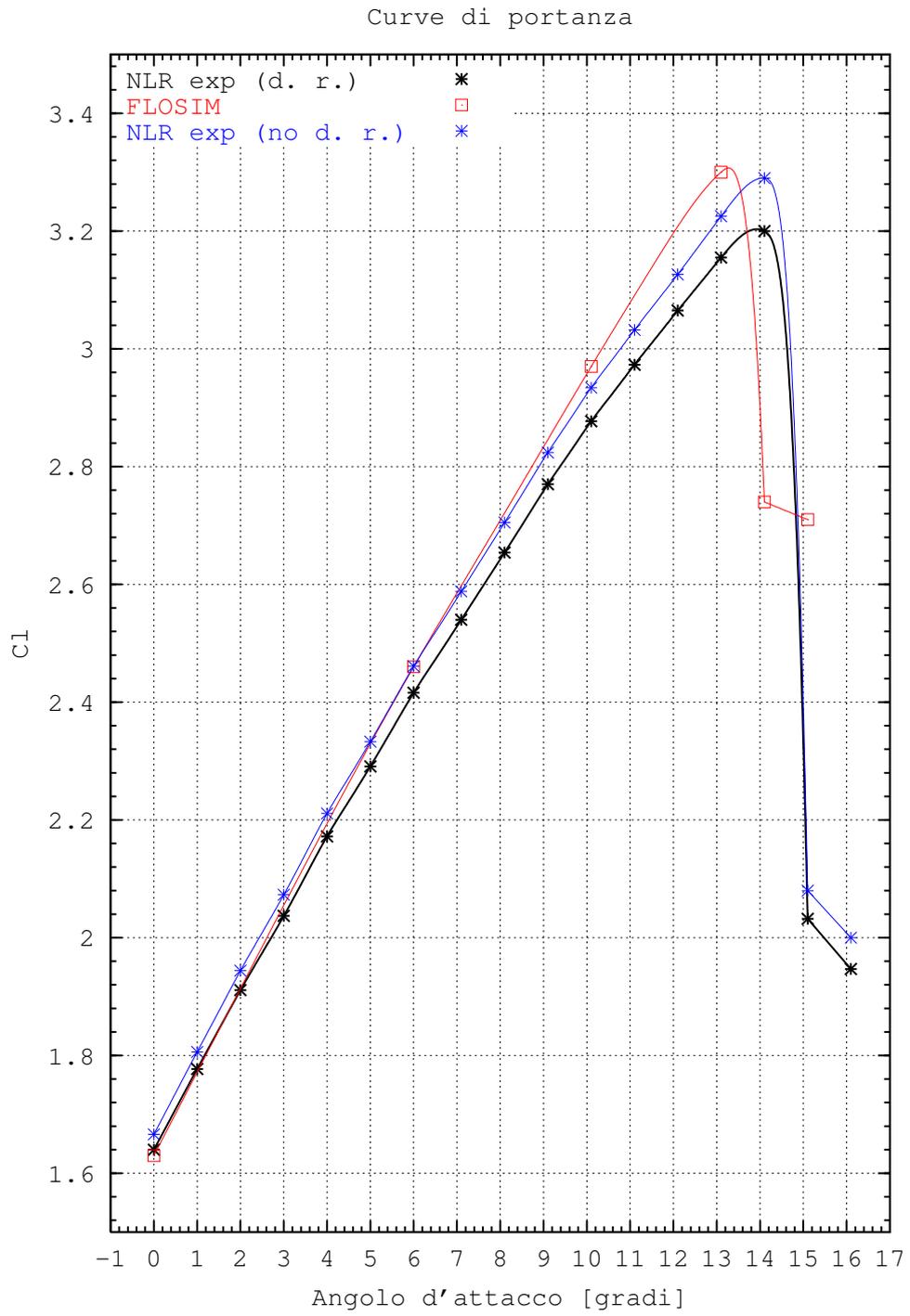


Figura IV.11: Curve di portanza

IV. IL TEST-CASE DELL' NLR 7301 ED IL PROFILO BDM

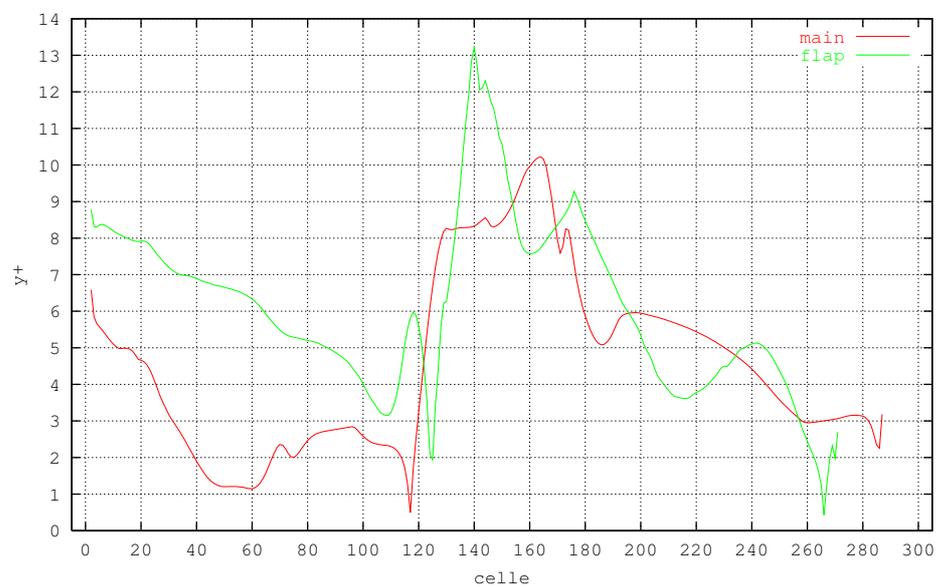
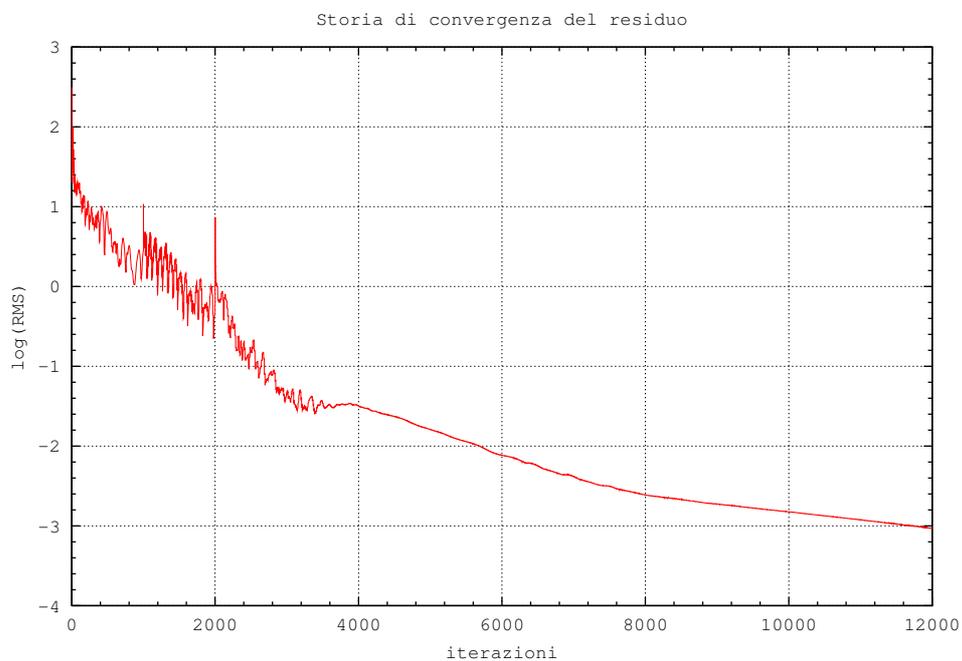


Figura IV.12: Storia di convergenza del residuo ed andamento dell' y^+ ($\alpha = 6$, transizione sul dorso al 3% della corda)

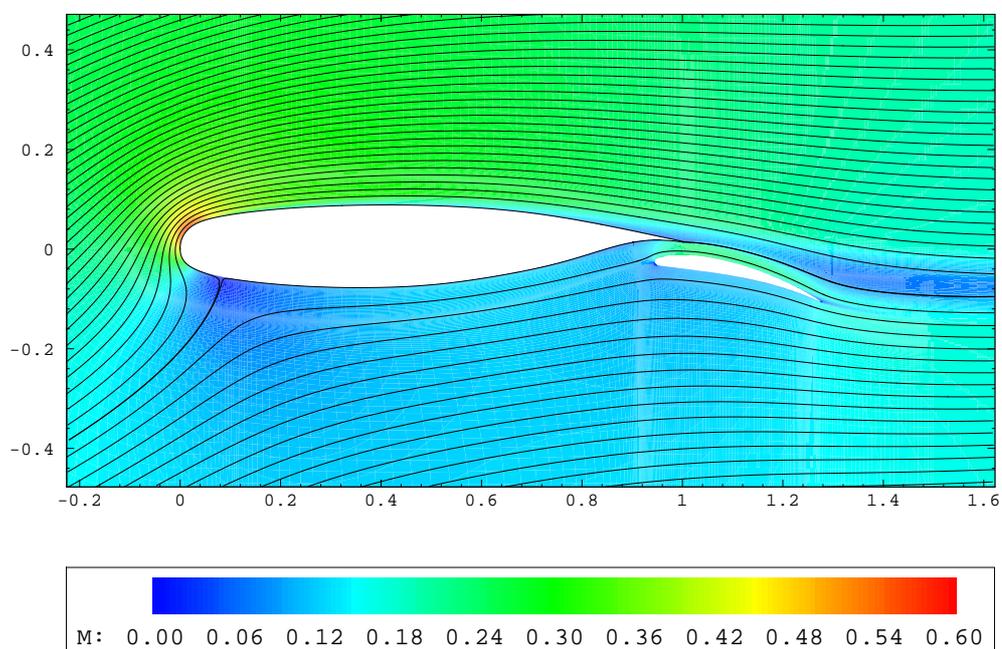


Figura IV.13: Linee di corrente ed iso-Mach per $\alpha=13.1^\circ$

IV.4 Il profilo tricomponente BDM

Dopo aver ottenuto le soluzioni sul profilo NLR 7301 si è ritenuto possibile provare a risolvere anche il profilo tricomponente BDM (fig. IV.14) che rappresenta una reale configurazione da alta portanza.

Per questa geometria si sono eseguiti alcuni test utilizzando il codice FLUENT (le figure IV.14 e IV.15 mostrano alcuni risultati). Queste prime soluzioni sono introduttive a quella che appare come la più immediata applicazione delle conoscenze acquisite.

Come si può dedurre dalla figura IV.15 la zona tra le intercapedini dei tre componenti presenta un flusso complicato e per tal motivo si ritiene interessante implementare e provare con FLOSIM il modello di turbolenza a tre equazioni di Durbin (V^2 -f) che ha suscitato interesse perché sembra essere adeguato a cogliere bene questo flusso.

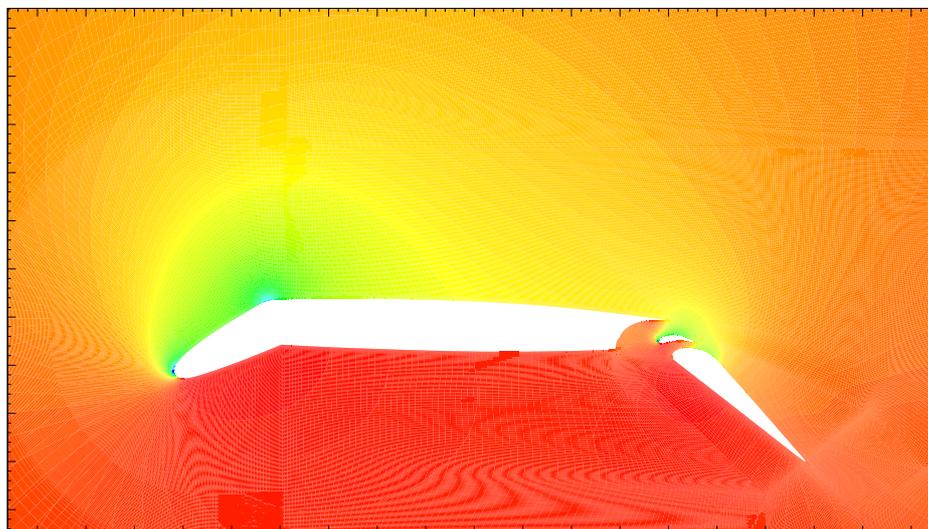


Figura 1: BDM Airfoil ($\alpha=8^\circ$, $M=0.2$, $Re=6.0E+6$) iso- C_p

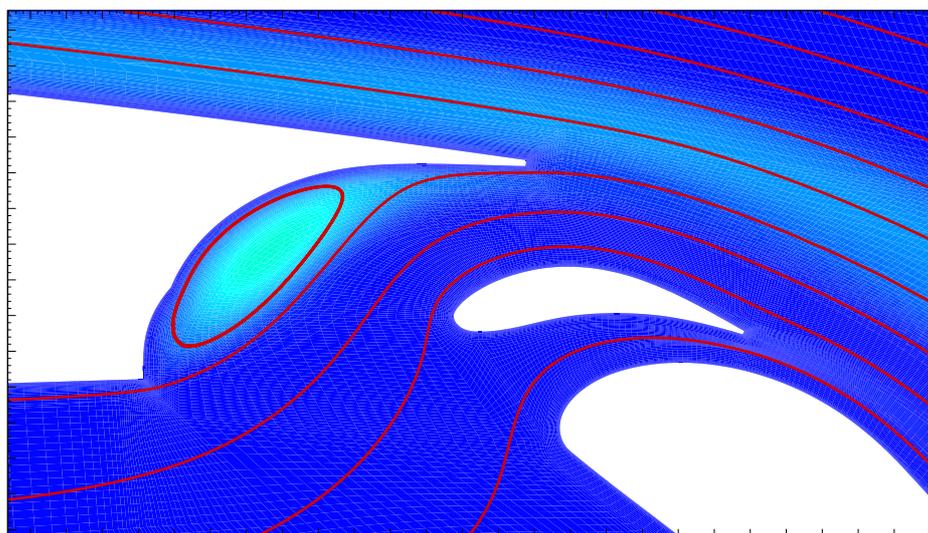


Figura 2: BDM Airfoil ($\alpha=8^\circ$, $M=0.2$, $Re=6.0E+6$) linee di corrente ed iso- μ_{turb}/μ_∞

Conclusioni e prospettive

Con questo lavoro di tesi si è riusciti a rispondere al quesito iniziale circa la possibilità di simulare stallo e post-stallo di un profilo alare con metodi RANS: è possibile trovare delle soluzioni stabili anche ad incidenze superiori a quella critica.

L'analisi delle diverse simulazioni ha mostrato la sensibile dipendenza delle soluzioni numeriche in alta portanza da parametri come griglia computazionale, modello di turbolenza e viscosità artificiale. Le sperimentazioni numeriche sviluppate hanno permesso di quantificare l'influenza di questi parametri, al punto che si ritiene possibile ora pilotare un metodo numerico verso soluzioni plausibili. In particolare, il risultato delle manipolazioni delle griglie di calcolo si potrebbe addirittura sintetizzarsi affermando di aver trovato lo stallo di una griglia piuttosto che di un profilo, ma questa attività è stata indispensabile per comprendere e stimare la reale influenza di caratteristiche come l'allungamento relativo e la dimensione trasversale delle celle a parete.

A queste conclusioni si è pervenuti impiegando due diversi codici (il primo messo a punto per l'alta portanza in questo lavoro, l'altro essendo un codice commerciale).

Un'altra indicazione emersa è l'esigenza di applicare modelli di turbolenza avan-

Conclusioni e prospettive

zati per un'analisi accurata di una realistica configurazione di un profilo alare in atterraggio.

L'esperienza maturata potrà trovare applicazione in numerosi settori ingegneristici e sarà un utile punto di partenza per la prossima generazione di tesisti incaricata di ulteriori approfondimenti in questo campo.

Bibliografia

- [1] **Abbott I. H., Von Doenhoff A.E. (1959)** : “*Theory of Wing Sections*” Dover Publications, New York

- [2] **Amato M., Paparone L. (1994)** : “*On the Application of the Multizone Modelling and the Local Grid Refinement Technique for High-Lift Airfoil Analysis*” Centro Italiano Ricerche Aerospaziali (CIRA)

- [3] **Capizzano F. (1999)** : “*Analisi di Condizioni Aerodinamiche di Off-Design con Modelli di Turbolenza Algebrici*” Tesi di Laurea, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Dipartimento di Progettazione aeronautica

- [4] **Cebeci T., Smith A. M. O. (1974)** : “*Analysis of Turbulent Boundary Layers*” Academic Press, New York

- [5] **Courant R. , Isaacson E. , Rees M. (1952)** : “*Comm. Pure Appl. Math*” vol. 5, pp. 243-255

- [6] **De Marco A. (1996)** : “*Simulazione Numerica di Flussi Viscosi con Suzione e Iniezione di Massa*” Tesi di Laurea, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Dipartimento di Progettazione Aeronautica

Bibliografia

- [7] **Dutt P. (1988)** : “*Stable Boundary Conditions and Difference Schemes for Navier-Stokes Equations*” SIAM J. Numer. Anal., Vol. 25, No. 2, pp. 245-267
- [8] **Favre A. (1965)** : “*Equations des gaz turbulents compressibles*” J. de Mécanique, Vol. 4, No. 3
- [9] **Mele B. (2000)** : “*Analisi delle Prestazioni di Diversi Modelli di Turbolenza nella Simulazione di Flussi Transonici Intorno a Profili Alari*” Tesi di Laurea, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Dipartimento di Progettazione aeronautica
- [10] **Grasso F. , Meola C. (1996)** : “*Euler and Navier-Stokes Equations for Compressible Flows: Finite-Volume Methods*” Handbook of Computational Fluid Mechanics, Academic Press
- [11] **Hirsch C. (1990)** : *The Numerical Computation of Internal and External Flows* Vol. 1,2. John Wiley & Sons, New York
- [12] **Jameson A., Schmidt W., Turkel E. (1981)** : “*Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes*” AIAA Paper 81-1259
- [13] **Jameson A. (1985)** : “*Numerical Solution of the Euler Equations for Compressible Inviscid Fluids*” MAE Report 1643
- [14] **Kim C.S. , Kim C. , Rho O.H. (2000)** : “*Parallel Computations of High-Lift Airfoil Flows Using Two-Equation Turbulence Models*” AIAA J. , vol. 38 , no. 8 , pp. 1360-1368

Bibliografia

- [15] **Kolmogorov A.N. (1942)** : “*Equation of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid*” *Izvestia Acad. Sci., USSR, Phisycs*, vol. 6, no. 1-2, pp. 456-460
- [16] **Krist L.S. , Biedron R.T. , Rumsey C.L. (1997)** : “*CFL3D User’s Manual (Version 5)*” Second Ed. Also pub. as NASA TM-1998-208444, June 1998
- [17] **Lax P.D. , Wendroff B. (1960)** : “*Comm. Pure Appl. Math*” vol. 13, pp. 217-237
- [18] **Lorenzo S. (1999)** : “*Determinazione della Resistenza Aerodinamica da Simulazioni Numeriche di Flussi Viscosi*” Tesi di Laurea, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Dipartimento di Progettazione Aeronautica
- [19] **Martinelli L. (1987)** : “*Calculations of Viscous Flows with a Multigrid Method*” Ph.D. Thesis, Princeton Univ., Dept. Mech. Aerospace Eng.
- [20] **Menter F.R. (1993)** : “*Zonal Two Equation $k - \omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows*” AIAA P. 93-2906, Orlando, Florida
- [21] **Pedrazzini A., De Maio B. (1995)** : “*FLOSIM Design Report, Un Codice Avanzato per la Simulazione di Flussi Viscosi Attorno a Geometrie Complesse*” Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Dipartimento di Progettazione Aeronautica, Rapporto Interno
- [22] **Prandtl L. (1925)** : “*Über die Ausgebildete Turbulenz*” *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, pp. 431-436

Bibliografia

- [23] **Prandtl L. (1945)** : “*Über ein Neues Formelstystem für die Auegebildete Turbulenz*” Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys.,Kl. II, p. 6
- [24] **Rumsey C.L. , Gatski T.B. , Ying S.X. , Berterlud A. (1997)** : “*Prediction of High-Lift Flows Using Turbulent Closure Models*” 15th AIAA Applied Aerodynamics Conf., AIAA P. 97-2260
- [25] **Schlichting H. (1968)** : “*Boundary-Layer Theory*” McGraw-Hill, New York
- [26] **Solonnikov V. A. , Kazhikhov A. V. (1981)** : “*Existence Theorems for the Equations of Motion of a Compressible Viscous Fluid*” Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 13, pp. 79-85
- [27] **Spalart P.R. , Allmaras S.R. (1992)** : “*A One Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows*” AIAA P. 92-439 , Reno, NV
- [28] **Strikwerda J. C. (1977)** : “*Initial Boundary Value Problems for Incompletely Parabolic Systems*” Comm. Pure Appl. Math., Vol. 30, pp. 797-822
- [29] **Swanson R.C. , Radespiel R. (1991)** : “*Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations*” AIAA J., Vol. 29, No. 5
- [30] **Swanson R.C. , Turkel E. (1995)** : “*Multistage Central-Difference Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations*” von Karman Institute Lecture Series 1995-01

Bibliografia

- [31] **Van Den Berg B. (1979)** : “*Boundary Layer Measurements on a Two-Dimensional Wing With Flap*” Nationaal Lucht- En Ruimtevaartlaboratorium (NLR)
- [32] **Vandromme D. (1997)** : “*Turbulence Modelling for Compressible Flows and Acoustics*” von Karman Institute Lecture Series 1997-03
- [33] **Wilcox D.C. (1998)** : “*Turbulence Modeling for CFD*” Second Ed., DCW Industries Inc., La Cañada, California