



TESI DI LAUREA TRIENNALE
IN
MECCANICA DEI FLUIDI

Analisi aerodinamica di un'elica

Un metodo a potenziale per calcoli di avanprogetto

Relatore:

Prof. Flavio Giannetti

Correlatori:

Ing. Serena Russo

Ing. Paolo Caccavale

Candidato:

Alessandro Borrelli

Matricola 0612601615

Indice

1	Richiami di Aerodinamica	1
1.1	Le ipotesi preliminari	2
1.2	Le equazioni di bilancio	3
1.3	Le equazioni di Navier-Stokes	4
1.4	La circolazione	5
1.5	La teoria del flusso potenziale	6
1.5.1	La velocità potenziale	6
1.5.2	L'equazione di Laplace	7
1.5.3	La funzione di corrente	8
1.5.4	I flussi elementari	8
1.5.5	La combinazione di flussi elementari	12
1.6	I possibili approcci	16
1.7	Il metodo a pannelli	18
1.7.1	La discretizzazione della geometria	19
1.7.2	Condizioni al contorno	21
1.7.3	Soluzione teorica	22
1.7.4	Step operativi	24
2	Le eliche	26
2.1	Generalità	26
2.2	Cenni storici	26
2.3	Descrizione e classificazione	27
2.4	Ambiti applicativi	29
2.5	Caratteristiche geometriche dei profili alari	29

INDICE

2.6	Le forze aerodinamiche agenti sull'elemento di pala	31
2.7	I coefficienti di Renard	32
2.8	Rendimento e curve caratteristiche	34
2.9	Le eliche cicliodali	35
3	Risultati numerici	37
3.1	Il codice PaMS	37
3.2	Il profilo NACA0012	39
3.3	L'elica singola	42
3.4	Il caso reale: l'Alenia C-27J Spartan	47
	Conclusioni	53
	Appendici	54
	Bibliografia	60

Elenco delle figure

1.1	Curva in campo di moto	5
1.2	Flusso uniforme	9
1.3	Sorgente e pozzo	10
1.4	Doppietta	11
1.5	Vortice	12
1.6	Combinazione flusso uniforme + sorgente	13
1.7	Flusso ideale attorno ad un cilindro	14
1.8	Flusso reale attorno ad un cilindro	15
1.9	Quadro riassuntivo dei modelli fluidodinamici	17
1.10	Pannellizzazione 3D	19
1.11	Geometria di un pannello quadrilatero	20
1.12	Perdita di contatto fra pannelli adiacenti	21
1.13	Descrizione grafica del problema del moto a potenziale	22
2.1	Vite di Archimede	27
2.2	Vite aerea di Leonardo	28
2.3	Elementi caratteristici di un profilo alare	30
2.4	Relazioni angolari su un profilo alare	31
2.5	Componenti delle forze agenti su un profilo alare	32
2.6	Genesi della spinta	33
2.7	Curve caratteristiche di un'elica	35
2.8	Schematizzazione di un ciclorotore	36
3.1	38
3.2	esempio di file DATAIN.dat	39

ELENCO DELLE FIGURE

3.3	Confronto tra coefficienti reali e simulati	40
3.4	Coefficiente di resistenza	41
3.5	Vortici di estremità simulati	41
3.6	Vortici di estremità reali, visibili per effetto della condensazione del vapore acqueo	42
3.7	Moto elicoidale generato da un'elica	43
3.8	Andamento F_x e F_y solo elica	44
3.9	Andamento F_z e M_x solo elica	45
3.10	Andamento M_y e M_z solo elica	46
3.11	Alenia C-27J Spartan	47
3.12	Confronto fra i coefficienti	48
3.13	Confronto fra i rendimenti	49
3.14	Componenti M_x ed M_y sull'accoppiamento ala-elica	51
3.15	Componente M_z sull'accoppiamento ala-elica	52

Sommario

Nel presente lavoro di tesi si è svolto uno studio aerodinamico di un'elica, utilizzando nello specifico un metodo a pannelli.

Nel primo capitolo verranno illustrate alcune proprietà dei fluidi fondamentali alla comprensione del problema, le leggi del moto e verrà descritta una teoria semplificate delle stesse, la teoria del flusso potenziale, su cui si basa il metodo adottato per le simulazioni: il *metodo a pannelli*.

Nel secondo capitolo ci sarà un'introduzione al mondo delle eliche, che comprenderà la loro storia, le funzionalità, gli ambiti applicativi e più nel dettaglio i parametri teorici e geometrici che le caratterizzano.

Il terzo capitolo riguarderà l'applicazione del metodo a pannelli su un'elica del c27j spartan, evidenziando alcuni fenomeni di carattere ingegneristico.

Nella parte conclusiva saranno confrontati i vantaggi e le criticità del metodo impiegato rispetto ad un più complesso ma classico metodo di fluidodinamica computazionale.

Capitolo 1

Richiami di Aerodinamica

I fluidi, a differenza dei solidi le cui molecole possono solo oscillare di poco rispetto alla loro posizione, sono formati da molecole in continuo movimento. Di conseguenza, un approccio microscopico del problema risulta molto complesso e ridondante per la risoluzione di problemi pratici. L'informazione dettagliata su posizione e velocità di ogni singola molecola è impossibile da specificare come condizione iniziale.

Per ovviare a questo problema, l'unica possibilità è quella di ragionare su quantità medie in senso statistico, ossia da un gran numero di molecole deve emergere il comportamento collettivo dell'intera porzione di fluido considerato. Per questo motivo, si deve identificare un volume di controllo ed in esso calcolare le grandezze caratteristiche di un fluido: bisogna quindi immaginare di effettuare un gran numero di esperimenti identici nei vincoli esterni, e poi mediare le nostre grandezze contenute nel volume di controllo in un dato istante rispetto a tutti questi esperimenti.

Ci occuperemo, durante il nostro studio, di una ristretta categoria dei fluidi: i fluidi newtoniani. Essi presentano un'importante caratteristica: la loro viscosità non varia con la velocità con cui viene misurata. Matematicamente presentano un legame di proporzionalità diretta tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore delle velocità di deformazione e la costante di proporzionalità è proprio la viscosità:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (1.1)$$

L'acqua, l'aria e gli oli sono i fluidi newtoniani più comuni.

1.1 Le ipotesi preliminari

Come vedremo in seguito le leggi che governano il moto dei fluidi sono molto complesse. Uno studio completo ed approfondito richiede una conoscenza matematica preliminare molto avanzata. Per ovviare a questo “problema”, è possibile utilizzare delle approssimazioni che ci consentano di semplificare notevolmente le nostre equazioni, senza ricorrere a nessuna trasformazione matematica particolare a patto di accettare che le soluzioni non saranno quelle reali ma approssimate. Di conseguenza, considereremo le seguenti ipotesi:

- *continuità*: consideriamo il fluido come un continuo e non discreto. Ciò implica che proprietà intensive del fluido, come densità, temperatura, pressione, velocità, possano essere definite a qualunque scala di lunghezza, anche infinitesima, e quindi varino con continuità da un punto ad un altro. Per stabilire se è possibile applicare l'ipotesi del continuo, ci si basa sul numero di Knudsen definito come il rapporto tra il cammino libero medio molecolare ed una grandezza caratteristica. Si ritiene di solito applicabile l'ipotesi del continuo quando esso è minore di 0.01;
- *incomprimibilità*: la comprimibilità è una caratteristica fisica dei fluidi, e descrive quantitativamente la proprietà che un elemento di fluido modifica il suo volume quando cambia la pressione che agisce sulla superficie dell'elemento stesso. Il parametro fondamentale per stimare gli effetti della comprimibilità è il numero di Mach definito come il rapporto della velocità del fluido sulla velocità del suono, quindi un parametro adimensionale. Trascurare gli effetti della comprimibilità vuol dire ragionare in termini di densità costante. Si ritiene di solito applicabile l'ipotesi di incomprimibilità se $\text{Mach} < 0.3$

- *idealità del fluido*: la viscosità è una proprietà dello stato termodinamico del fluido, e la considerazione degli effetti viscosi risulta di fondamentale importanza per stimare la resistenza aerodinamica. Per sapere se occorre tenere in conto le proprietà viscosi del fluido, e quindi considerare un *fluido ideale* caratterizzato da densità costante e viscosità nulla, ci si riferisce ad un altro numero adimensionale: il numero di Reynolds, definito come un rapporto tra le forze di massa e le forze di inerzia. Dunque, quando il numero di Reynolds è molto grande, le forze viscosi sono trascurabili rispetto alle forze di inerzia. Ciò comporta che le azioni viscosi vengono ad interessare solo una piccola regione del campo fluido, il cosiddetto strato limite. Questo avviene nel caso dei corpi sottili; nel caso di corpi tozzi gli elevati gradienti di pressione causano il distacco dello strato limite dal corpo. Nel momento in cui si verifica ciò si ha la formazione di fenomeni turbolenti come vortici e correnti di ricircoli, che causano vibrazioni (con relativo rumore) ed un aumento della resistenza indotta.

1.2 Le equazioni di bilancio

Per un sistema meccanico isolato qualsiasi, insieme di punti materiali, sono valide le leggi di conservazione delle grandezze meccaniche microscopiche massa, quantità di moto ed energia. Se si tiene conto del carattere vettoriale della quantità di moto, avremo cinque integrali primi del moto:

$$\sum_{i=1}^N m_i = M \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i v_i = Q \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{v_i^2}{2} + e_i^{pot} \right) = \varepsilon \quad (1.4)$$

Ciò comporta che in un sistema non isolato, ma composto da un gran numero

di particelle, queste grandezze anche se non più costanti varieranno lentamente, e tanto più lentamente quanto più grande è il numero di particelle. Questa osservazione è la base per l'identificazione dei parametri macroscopici che caratterizzano il movimento collettivi di un fluido proprio nelle grandezze meccaniche che, se il sistema fosse isolato, sarebbero conservate.

In caso di sistema continuo, la sommatoria viene sostituita dall'integrale.

1.3 Le equazioni di Navier-Stokes

Le equazioni di bilancio per la massa, quantità di moto ed energia ricavate sotto l'ipotesi di quasi-equilibrio termodinamico prendono il nome di equazioni di Navier-Stokes.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V + pI + J_Q^d) = F \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) V + pV + J_Q^d \cdot V + J_E^d \right] = L \quad (1.7)$$

Esse costituiscono un sistema di cinque equazioni differenziali in sei incognite, che diventa un sistema chiuso se si conosce anche l'equazione di stato, cioè una relazione funzionale fra le variabili termodinamiche densità, energia interna e pressione:

$$f(\rho, p, e) = 0 \quad (1.8)$$

Valgono per ogni tipo di fluido ed una volta note le condizioni iniziali ed imposto le condizioni al contorno, questo complesso sistema di equazioni differenziali può essere integrato numericamente ed è perfettamente in grado di descrivere a livello microscopico anche la più complicata delle correnti come, ad esempio, una corrente turbolenta ma anche in presenza di fenomeni termici, di reazioni chimiche, etc.

In caso di flusso incomprimibile otteniamo una semplificazione delle equazioni

di Navier Stokes:

$$\begin{cases} \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V + f \end{cases} \quad (1.9)$$

1.4 La circolazione

Considerando la generica curva C immersa in un campo di moto in Figura(3.5): La circolazione è definita nel modo seguente:

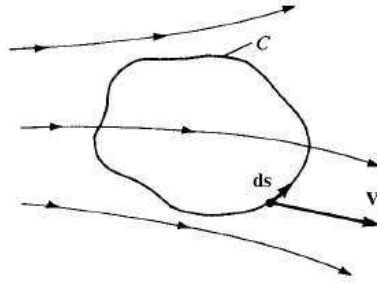


Figura 1.1: Curva in campo di moto

$$\Gamma \equiv - \oint_C V \cdot ds \quad (1.10)$$

È una proprietà cinematica che dipende solo dal campo di velocità e dalla scelta della curva C . È possibile relazionare la circolazione con la vorticità tramite il teorema di Stokes:

$$\Gamma \equiv - \oint_C V \cdot ds = - \iint_S (\nabla \times V) \cdot dS \quad (1.11)$$

Semplicemente, la circolazione lungo una curva C è pari alla vorticità integrata su qualunque superficie aperta delimitata da C .

1.5 La teoria del flusso potenziale

I flussi potenziali (o correnti euleriane) sono stati storicamente di grande utilità in quanto possono essere ricondotti, in caso di incomprimibilità del flusso, allo studio di equazioni lineari con la conseguente facilità di trattazione matematica. Con questa teoria è stato possibile ottenere le prime informazioni sul campo di moto intorno a corpi più o meno complessi anche se la teoria non era in grado di calcolare le forze esercitate dal flusso sul corpo.

1.5.1 La velocità potenziale

Nell'ipotesi di flusso irrotazionale, esiste una funzione scalare ϕ tale che la velocità è data dal gradiente di ϕ .

$$V = \nabla\phi \quad (1.12)$$

Tale funzione scalare è denominata *velocità potenziale*, ed è funzione delle coordinate spaziali.

In coordinate cartesiane, le componenti della velocità espresse in funzione della velocità potenziale sono:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.13)$$

Tramite semplici considerazioni geometriche, si ricavano le coordinate cilindriche:

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}; \quad V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (1.14)$$

e, infine, le coordinate sferiche:

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}; \quad V_z = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\Phi} \quad (1.15)$$

Quando un campo di flusso è irrotazionale, potendo definire una velocità potenziale, vi è un'enorme semplificazione. Invece di trattare con le componenti di velocità (ad esempio, u , v , e w) come incognite, che richiedono quindi tre equazioni per questi tre incognite, possiamo calcolare la sola velocità poten-

ziale, che richiede la soluzione di una sola equazione per il flusso di campo. Una volta che ϕ è noto per un determinato problema, le velocità sono ottenute direttamente dalle equazioni sopra citate. Possiamo quindi facilmente dedurre perché l'analisi di un flusso irrotazionale è molto più semplice rispetto a quella di un flusso rotazionale.

Un flusso irrotazionale è anche definito un *flusso potenziale*.

1.5.2 L'equazione di Laplace

Le condizioni di irrotazionalità e incomprimibilità (che implicano un atto di moto senza espansioni nè rotazioni) determinano il campo di moto, mediante la risoluzione del seguente sistema, composto da quattro equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \nabla \cdot V = 0 \\ \nabla \times V = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Come ampiamente definito in precedenza, in caso di irrotazionalità la velocità può essere espressa come il gradiente della velocità potenziale. Sostituendo l'equazione della velocità espressa in funzione della velocità potenziale nel sistema soprastante, e ricordando che il rotore del gradiente è pari a zero, otteniamo:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.17)$$

Questa equazione, che va naturalmente dotata di opportune condizioni al contorno, è una equazione *lineare* del secondo ordine a derivate parziali. Le sue soluzioni (che si dicono anche funzioni armoniche) sono ovunque funzioni continue insieme alle loro derivate, tranne che eventualmente su alcuni punti del contorno.

Pertanto risulta valido il *principio di sovrapposizione degli effetti*, secondo il quale una combinazione lineare di soluzioni di un'equazione lineare è ancora soluzione dell'equazione, a patto che anche le condizioni al contorno siano anch'esse lineari.

La teoria potenziale utilizza quindi sovrapposizioni di soluzioni semplici per ricavare soluzioni di flussi complessi. Il vettore velocità, obiettivo dell'analisi,

si ottiene semplicemente per derivazione della funzione potenziale.

1.5.3 La funzione di corrente

È possibile riformulare il problema di Laplace per una nuova grandezza detta funzione di corrente ψ , che fisicamente rappresenta una portata attraverso una superficie, così definita nel caso bidimensionale:

$$\psi(P_2) = \psi(P_1) + \int_{P_1}^{P_2} v \cdot ndc \quad (1.18)$$

dove P_1 e P_2 sono due punti che giacciono in una regione connessa del fluido ed l è il generico percorso aperto che li unisce. Nel caso di un fluido incomprimibile, è possibile dimostrare attraverso il teorema di Gauss che il valore di ψ dipende solamente dalla posizione dei punti rispetto cui si calcola, ma non dal percorso che li unisce. Per quanto riguarda la funzione di corrente, in maniera duale a quanto detto per il potenziale, si avrà che essa esisterà solo sotto la condizione di moto incomprimibile e nel caso di moto irrotazionale soddisferà l'equazione di Laplace.

Si può inoltre dimostrare che la funzione di corrente, il vettore velocità ed il potenziale sono legati attraverso le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.19)$$

Se ne deduce che le linee equipotenziali e le linee in cui $\psi = cost$ costituiscono un sistema di curve ortogonali.

1.5.4 I flussi elementari

Nell'ambito della teoria del potenziale, essendo possibile sfruttare la sovrapposizione degli effetti, flussi complessi si possono sintetizzare tramite combinazione lineare di flussi elementari. Di seguito, verranno riportati i flussi elementari principali

Flusso uniforme

Consideriamo un flusso uniforme con velocità V_∞ , orientato nel verso delle x positive, come mostrato in figura:

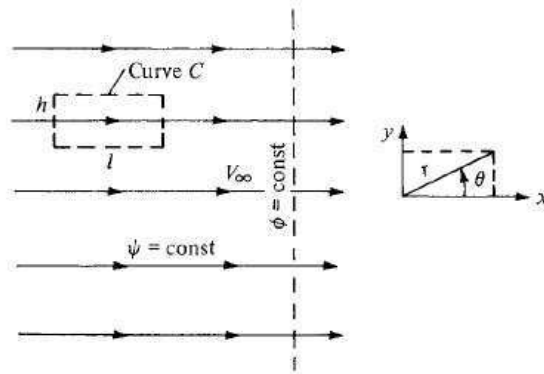


Figura 1.2: Flusso uniforme

Risultano le seguenti componenti della velocità, in funzione della velocità potenziale:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = V_\infty \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0 \quad (1.21)$$

Tramite integrazione, si giunge all'equazione della velocità potenziale per un flusso uniforme di velocità V_{infty} , orientato nel verso delle x positive:

$$\phi = V_\infty x \quad (1.22)$$

Esprimibile anche in coordinate polari:

$$\phi = V_\infty r \cos \theta \quad (1.23)$$

Sorgente e pozzo

Nel caso della sorgente tutte le linee di corrente sono linee rette originate da un punto preciso O , e la velocità lungo ogni linea di corrente diminuisce linearmente con la distanza dal punto O . Il caso opposto è il pozzo, in cui tutte le linee di corrente sono dirette verso verso il punto O . In altre parole, il pozzo è semplicemente una sorgente negativa.

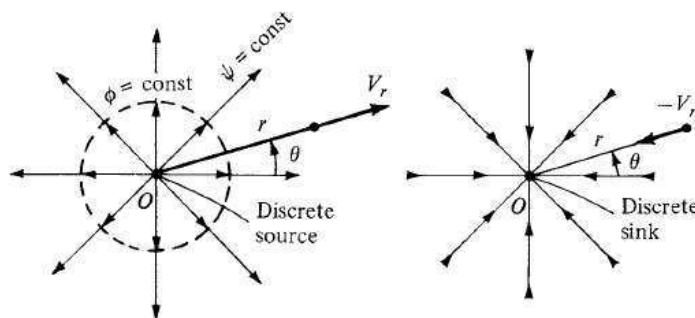


Figura 1.3: Sorgente e pozzo

Il sistema di coordinate rappresentato in figura (1.3) è un sistema cilindrico, e consideriamo l'origine O come una sorgente discreta. Inoltre, interpretiamo il flusso radiale circostante semplicemente indotto dalla presenza della sorgente discreta. In questo modo, l'origine O è un *punto singolare*. La componente tangenziale è nulla, mentre la componente radiale è pari a:

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad (1.24)$$

Il termine al numeratore rappresenta la forza della sorgente, e fisicamente è il tasso di volume di flusso dalla sorgente, per profondità. Se positivo, è una sorgente; inversamente, è un pozzo.

Velocità potenziale e funzione di corrente si calcolano tramite una semplice integrazione:

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r; \quad \psi = \frac{\Lambda}{2\pi r} \theta \quad (1.25)$$

Doppietta

Consideriamo una sorgente con forza Λ ed un pozzo con forza uguale e contraria, ad una certa distanza l . Portando a zero questa distanza, e mantenendo costante il prodotto $l\Lambda$, otteniamo la doppietta. La velocità potenziale e la

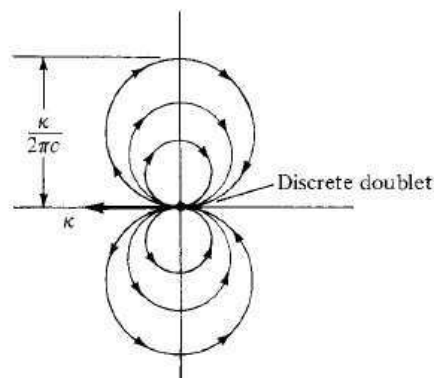


Figura 1.4: Doppietta

funzione di corrente sono, rispettivamente, pari a:

$$\phi = \frac{k \cos \theta}{2\pi r}; \quad \psi = -\frac{k \sin \theta}{2\pi r} \quad (1.26)$$

Il termine al numeratore k indica la forza della doppietta ed è quindi pari a $l\Lambda$

Vortice

Consideriamo un flusso, in cui tutte le linee di corrente sono cerchi concentrici rispetto un punto assegnato. La velocità, lungo una data linea di flusso è costante ma, tra una linea di flusso e l'altra, varia linearmente in base alla distanza. Un flusso di questo tipo è un *vortice*. La componente radiale della velocità è nulla, mentre quella tangenziale è pari a:

$$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.27)$$

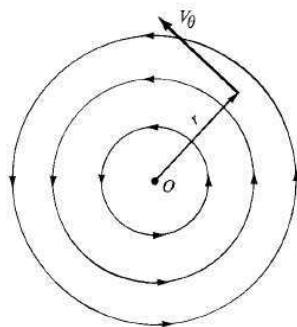


Figura 1.5: Vortice

La circolazione, nel caso del vortice, è definita la *forza del vortice*.

La velocità potenziale e la funzione di corrente si ottengono integrando la velocità e sono pari a:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (1.28)$$

Di seguito, una tabella riassuntiva con i principali flussi elementari:

Tipo di flusso	Velocità	ϕ	ψ
Flusso uniforme	$u = V_\infty$	$V_\infty x$	$V_\infty x$
Sorgente	$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}$	$\frac{\Lambda}{2\pi} \ln r$	$\frac{\Lambda}{2\pi} \theta$
Vortice	$V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
Doppietta	$V_r = -\frac{k}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$ $V_\theta = -\frac{k}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}$	$\frac{k}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}$	$-\frac{k}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$

Tabella 1.1: I principali flussi elementari

1.5.5 La combinazione di flussi elementari

Come anticipato in precedenza, la combinazione di flussi elementari ci restituisce flussi complessi presi in esame, data la linearità del problema. Di seguito saranno illustrate le principali combinazioni.

Flusso uniforme + sorgente/pozzo

Consideriamo un sistema di coordinate polari, nella cui origine è presente una sorgente. Successivamente, immaginiamo che tale sorgente sia investita da un flusso uniforme. La funzione di corrente risultante è pari alla somma delle singole funzioni di corrente, data la linearità del sistema, ed è pari a:

$$\psi = V_\infty r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (1.29)$$

Da questa combinazione, si ottengono le linee di flusso attorno ad un corpo semi infinito come mostrato in figura (1.6).

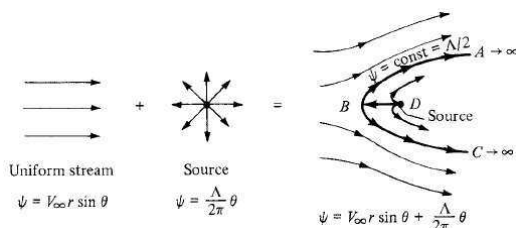


Figura 1.6: Combinazione flusso uniforme + sorgente

Le componenti della velocità, ottenibili per differenziazione, sono pari a:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad (1.30)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \quad (1.31)$$

Se, ad una certa distanza dalla sorgente, introduciamo un altro punto di singolarità corrispondente ad un pozzo otteniamo il flusso attorno ad un ovale particolare: l'ovale di Rankine.

Flusso uniforme + doppietta

In precedenza è stato dimostrato che il flusso attorno un elemento di forma ovoidale è ricavabile per combinazione di un flusso uniforme con una sorgente ed un pozzo. Per passare ad una geometria perfettamente circolare, dobbiamo combinare un flusso uniforme ed una doppietta.

Per combinazione lineare di entrambi i flussi si ottiene facilmente la funzione di corrente risultante:

$$\psi = (V_\infty r \sin \theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (1.32)$$

Le linee di flusso corrispondenti sono, graficamente:

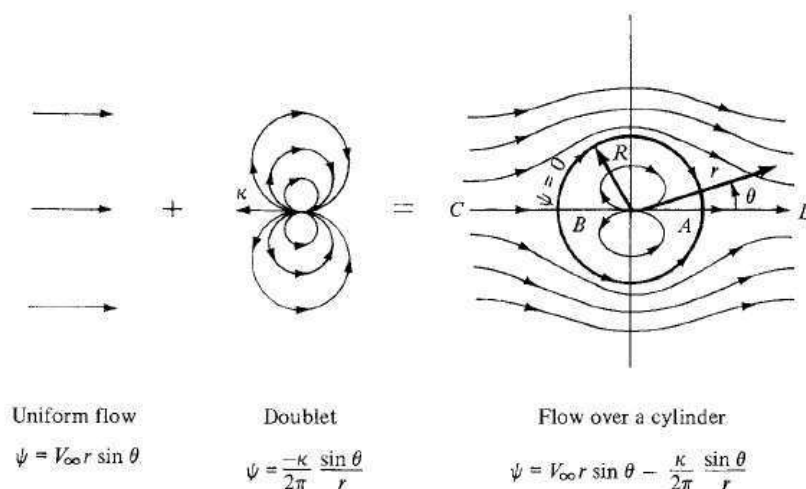


Figura 1.7: Flusso ideale attorno ad un cilindro

Le componenti di velocità, ottenibili per differenziazione, sono pari a:

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) V_\infty \cos \theta \quad (1.33)$$

$$V_\theta = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_\infty \sin \theta \quad (1.34)$$

Con un opportuno bilancio, si nota che la distribuzione di pressione sulla parte superiore del cilindro bilancia perfettamente la distribuzione sulla parte inferiore. Questo si traduce in una non generazione di portanza, e realisticamente è accettabile.

Nello stesso modo, la distribuzione di pressione a valle del cilindro bilancia perfettamente la distribuzione a monte. Questo si traduce in una non gene-

razione di resistenza: realisticamente non è possibile perché qualunque corpo immerso in un fluido genera resistenza aerodinamica.

È più comunemente conosciuto come *paradosso di D'Alambert*.

Flusso uniforme + doppietta + vortice

Per ovviare al problema della non generazione di resistenza, oltre al flusso uniforme ed alla doppietta, si associa un vortice. La funzione di corrente corrispondente, ottenuta come combinazione lineare delle singole funzioni di corrente, è pari a:

$$\psi = (V_\infty r \sin \theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \quad (1.35)$$

Le linee di flusso corrispondenti sono, graficamente:

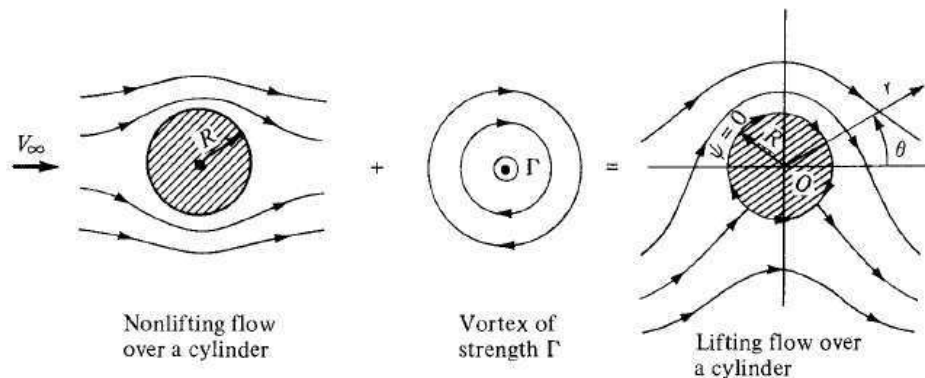


Figura 1.8: Flusso reale attorno ad un cilindro

Le componenti della velocità, ottenute per differenziazione, sono pari a:

$$V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \cos \theta \quad (1.36)$$

$$V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.37)$$

1.6 I possibili approcci

L'analisi fluidodinamica di un qualunque corpo immerso in un campo di moto può essere effettuata su differenti livelli di dettaglio. Come discusso in (1.3), le equazioni di Navier-Stokes descrivono correttamente il moto di un fluido in qualunque condizione operativa: forti instabilità fluidodinamiche come turbolenze od onde d'urto, geometrie complesse dei corpi immersi in un campo, fenomeni termici o chimici, numeri di Reynolds bassi, ampie zone di separazione ed inoltre valgono per qualunque tipologia di fluido. La risoluzione per via analitica di queste equazioni è fattibile solamente in casi semplici con flussi laminari e geometrie semplici (sfere, lastre piane), mentre le risoluzioni di casi reali, in cui compaiono di frequente flussi turbolenti, richiedono un approccio numerico. Esistono quindi diversi metodi per risolvere le equazioni di Navier-Stokes e poiché generalmente sono operazioni dall'elevato costo computazionale, si sono sviluppati differenti approcci:

- *Direct Numerical Simulation* (DNS): è l'approccio concettualmente più semplice, si discretizzano lo spazio e il tempo con griglie della dimensione voluta e si eseguono i calcoli su esse. È l'approccio che restituisce i risultati più accurati ma ha un costo computazionale elevatissimo, devono essere impiegati dei supercomputer;
- *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS): si basano sull'assunzione che si possa vedere il moto turbolento come formato da un moto medio e da una sua fluttuazione nel tempo. Le grandezze delle equazioni di partenza vengono mediate in un certo intervallo di tempo; così facendo i tempi di calcolo vengono notevolmente ridotti in quanto le scale del moto medio risultano essere notevolmente maggiori di quelle del moto turbolento;
- *Large Eddy Simulation* (LES): consiste nel calcolare numericamente il comportamento delle scale turbolente più grandi e modellare opportunamente le scale più piccole. Per operare questa suddivisione si introducono filtri numerici creati ad hoc. Fornisce risultati più accurati delle RANS e ha al contempo un costo computazionale notevolmente

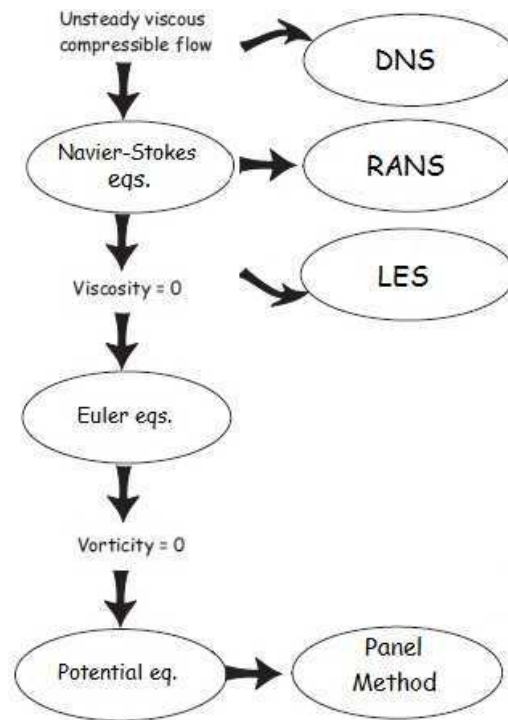


Figura 1.9: Quadro riassuntivo dei modelli fluidodinamici

inferiore a quello della DNS, per questo motivo è un metodo in forte sviluppo.

La risoluzione delle equazioni di Navier Stokes secondo questi differenti modelli ci permette di risalire a risultati molto prossimi a quelli reali, ma il costo computazionale risulta ancora abbastanza elevato.

Per questo motivo, sotto l'ipotesi di fluido non viscoso e termicamente non conduttivo, è possibile utilizzare le *Equazioni di Eulero*. Nell'ambito della modellistica di campi di moto non viscosi il modello retto dalle equazioni di Eulero rappresenta, da un punto di vista gerarchico, il livello più alto: esso contempla infatti il caso di flussi rotazionali, caratteristica di fondamentale importanza per la moderna progettazione aerodinamica, essendo possibile descrivere con buona approssimazione mediante le equazioni di Eulero campi di moto complessi: lo scarico di un turbofan, il flusso attorno a un'ala a forte freccia o a delta, o il flusso ideale attorno ad un corpo in una corrente asintotica non uniforme.

Nel caso di analisi di corpi sottili e sotto le ipotesi di irrotazionalità del campo di moto, è possibile utilizzare i modelli basati sulla teoria del flusso potenziale, descritta in (1.5). Essi ci consentono di realizzare accurati calcoli di progetto, preliminare o avanzato, con un carico computazionale ridotto. Esistono vari modelli basati su questa teoria, come il metodo a pannelli, che sarà introdotto ed utilizzato successivamente.

1.7 Il metodo a pannelli

L'analisi del campo aerodinamico può essere effettuata (sia in 2-D che in 3-D) con un metodo a pannelli o con un metodo alle differenze finite (a griglia). Il tipo di analisi (potenziale Laplaciana, *full-potential*, Euleriana, Navier-Stokes, viscoso/non viscoso) che si adotta è funzione della versatilità e velocità del metodo che si ha a disposizione e dell'accuratezza che si richiede al modello matematico. In generale, i metodi a pannelli (potenziali o potenziali/viscosi) sono computazionalmente meno onerosi dei metodi a griglia e più versatili per l'aggiornamento della geometria: per contro, sono più onerosi per il calcolo del campo *off-body*. Tale campo *off-body* nei metodi a griglia si riduce di fatto a una semplice interpolazione fra i valori del campo nei nodi più vicini al punto di interesse, mentre con i metodi a pannelli occorre calcolare i coefficienti di influenza di tutti i pannelli in tale punto.

Da un punto di vista dell'accuratezza del modello matematico, la sola analisi potenziale può essere ritenuta sufficiente per molti casi di interesse pratico: gli effetti della compressibilità e della viscosità sulla determinazione delle traiettorie sono in generale trascurabili, anche se la presenza dello strato limite sul componente principale può influenzare notevolmente il campo di moto locale.

In questo capitolo saranno descritti i metodi a pannelli basati sulla Terza Identità di Green.

1.7.1 La discretizzazione della geometria

La discretizzazione della geometria è una fase fondamentale per quanto riguarda il metodo a pannelli. In campo tridimensionale, si effettua una discretizzazione della superficie utilizzando un numero prefissato di pannelli a forma di quadrilatero sghembo come mostrato in Fig.(1.10). È impossibile

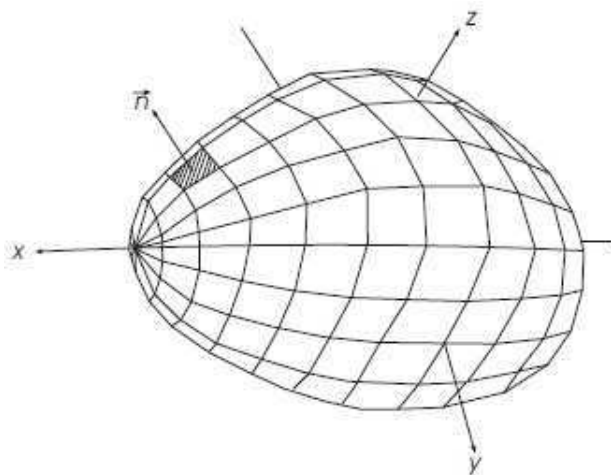


Figura 1.10: Pannellizzazione 3D

pensare a regole generali: si pensi, ad esempio, alle differenze che esistono tra un'ala, una fusoliera ed una presa d'aria.

In relazione al metodo dei pannelli piani, ampiamente usato oggi dall'industria aeronautica, è interessante descrivere il modo di passare dalla geometria così come descritta mediante quadrilateri per il calcolo aerodinamico alla sua "interpretazione" da parte del solutore. Si fa l'ipotesi che la descrizione della geometria disponibile sia topologicamente equivalente ad un grigliato 2-D, eventualmente con degenerazioni dovute al tipo di geometria. In Fig.(1.11) è rappresentata la costruzione di un pannello a partire da quattro punti, ad esempio A, B, C, D. Gli step da seguire sono:

1. Si definisce il centroide del pannello come quel punto le cui coordinate sono la media delle coordinate dei punti assegnati (in generale non complanari):

$$XP = \frac{XA + XB + XC + XD}{4} \quad (1.38)$$

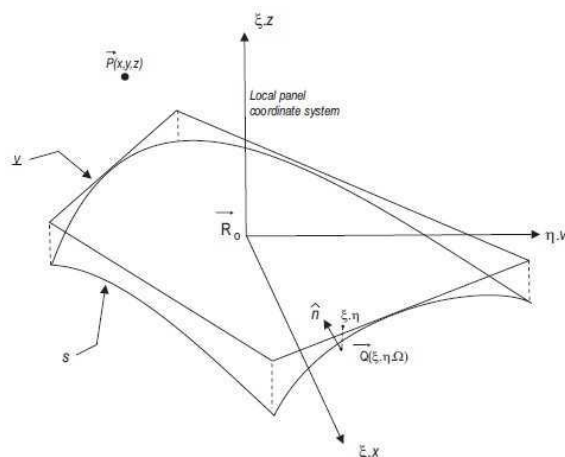


Figura 1.11: Geometria di un pannello quadrilatero

$$YP = \frac{YA + YB + YC + YD}{4} \quad (1.39)$$

$$ZP = \frac{ZA + ZB + ZC + ZD}{4} \quad (1.40)$$

2. Si assume come normale \mathbf{n} del pannello il versore del prodotto vettoriale tra le due diagonali del quadrilatero ABCD:

$$\mathbf{n} = \text{vers}[(C - A) \times (D - B)] \quad (1.41)$$

3. Si assume come piano del pannello il piano di normale \mathbf{n} passante per il centroide.
4. Si ottengono i vertici del pannello proiettando i punti A, B, C e D sul piano del pannello (rispettivamente in A', B', C' e D').

Si rileva immediatamente il punto più delicato di questa procedura (peraltro universalmente accettata, e standardizzata, in ambito industriale): i pannelli adiacenti non hanno lati in comune, in generale. Anche partendo da una geometria regolare, si arriva quindi ad una descrizione a pannelli che presenta, in generale, delle "fessure" tra pannello e pannello, Fig (1.12):

questo fatto viene "visto" dal solutore fluidodinamico, che, a causa della presenza di flussi spuri attraverso le fessure ("leakage flows"), calcolerà una

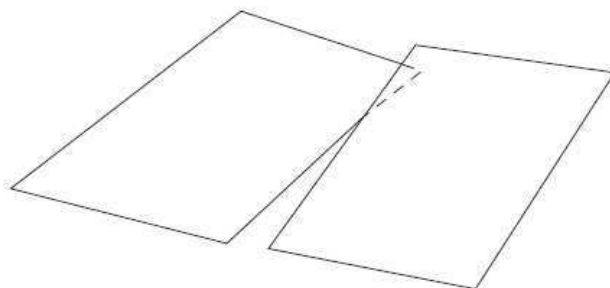


Figura 1.12: Perdita di contatto fra pannelli adiacenti

soluzione sicuramente non bene approssimata. Questo tipo di errore, dovuto esclusivamente ai difetti intrinseci nell'impiego di pannelli piani quadrilateri, è tanto più piccolo quanto più fine è la discretizzazione: peraltro un aumento del numero di pannelli presenta altri inconvenienti (in termini di un aumento non lineare del tempo di calcolo nei metodi a pannelli).

1.7.2 Condizioni al contorno

Come ampiamente trattato in precedenza, l'equazione di Laplace è di fondamentale importanza ed è valida per corpi di forma qualsiasi, non necessariamente sottili. Si è ottenuto quindi che campi di moto completamente diversi sono descritti dalla stessa equazione; ciò che ci permette di ottenere soluzioni differenti sono le condizioni al contorno: nello specifico, le condizioni sulle superfici solide e le eventuali condizioni di annullamento della perturbazione all'infinito. Per una trattazione matematica delle condizioni al contorno si rimanda all'Appendice (A).

Se il corpo è dotato di superfici impermeabili, la corrente non potrà penetrarvi; in assenza di viscosità però potrà essere presente una velocità tangenziale alla superficie non nulla. Dunque la condizione da imporre per una superficie impermeabile sarà:

$$V \cdot n = (\nabla\phi) \cdot n = 0 \quad (1.42)$$

ovvero:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (1.43)$$

Ovviamente su S .

1.7.3 Soluzione teorica

Il problema matematico costituito dall'equazione di Laplace e dalle condizioni al contorno può essere descritto schematicamente come in Fig. 1.10, in cui un corpo di forma arbitraria, delimitato dalla superficie S_B , è racchiuso in un volume V di frontiera esterna S_∞ . Le condizioni al contorno sono applicate sulle superfici S_b e S_∞ , la normale n è definita rivolta verso l'esterno della regione V di interesse. Senza entrare troppo nel dettaglio matematico, sfrut-

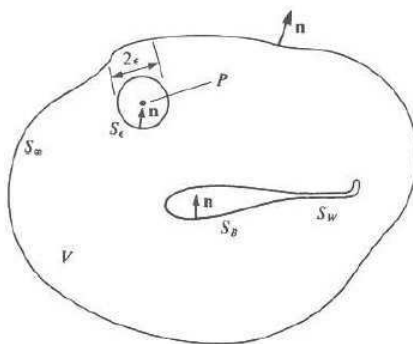


Figura 1.13: Descrizione grafica del problema del moto a potenziale

tanto le identità di Green presenti in Appendice (B), è possibile ottenere una soluzione generale del problema. Il potenziale ϕ può essere definito come:

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_W} \left[\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS + \phi_\infty(P) \quad (1.44)$$

Vediamo di comprendere il significato di ciascun termine presente nella soluzione.

Il primo termine della parentesi posta sotto il segno di integrale rappresenta il potenziale generato da una sorgente. Il coefficiente σ rappresenta l'*intensità di sorgente* o, se negativa, del pozzo. Il secondo termine in parentesi rappresenta il potenziale generato da una doppietta. Il coefficiente μ rappresenta l'*intensità della doppietta*.

Il termine ϕ_∞ è il potenziale del flusso uniforme che investe il profilo. Esso è definito come:

$$\phi_\infty(P) = u_\infty x + v_\infty y + w_\infty z \quad (1.45)$$

Dunque, per ottenere il potenziale di velocità nella regione V , occorre determinare l'intensità della distribuzione di doppiette e di sorgenti sulla superficie; tale combinazione di singolarità non è unica, ma verrà opportunamente scelta in base allo specifico problema fisico.

La soluzione generale richiede l'integrazione delle soluzioni elementari su tutta la superficie S su cui sono distribuite, in quanto ogni singolarità influenza l'intero campo di moto. Per ottenere la soluzione di uno specifico problema fluidodinamico è quindi necessario trovare la distribuzione dell'intensità delle singolarità tale da soddisfare le condizioni al contorno. Assegnando il potenziale sulla superficie del corpo si parla di un problema del tipo di Dirichlet; tale tecnica è largamente usata per risoluzioni numeriche nei metodi a pannelli. In alternativa, seguendo un approccio più fisico e diretto, si può assegnare direttamente la velocità normale sulle superfici solide, andando quindi ad affrontare un problema del tipo di Neumann; in tal caso la velocità nel campo di moto è ottenuta per derivazione del potenziale:

$$\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_B+S_W} \mu \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \nabla\phi_\infty(P) \quad (1.46)$$

E' inoltre possibile l'impiego di entrambe le condizioni nella risoluzione di uno stesso problema, assegnando la condizione di Neumann su alcune superfici e la condizione di Dirichlet sulle altre.

Sfortunatamente, anche imponendo questi requisiti, non si giunge ad un'unica soluzione, ovvero non esiste un'unica combinazione di sorgenti e doppiette che soddisfa le condizioni al contorno. Bisogna quindi formulare ulteriori considerazioni di carattere fisico, in modo tale da trovare la "giusta" distribuzione e, successivamente, tutte le grandezze che ci interessano (velocità, pressione, portanza, ecc.). Per simulare gli effetti dell'attrito e dell'inerzia, che vengono trascurati in un metodo potenziale, bisogna imporre la cosiddetta Condizione di Kutta che è un metodo alternativo per incorporare alcuni effetti della viscosità. La condizione può essere espressa in vari modi. Uno di questi è che non ci possono essere infiniti cambi di velocità al bordo di uscita. Anche se un fluido non viscoso presenta repentini cambi di velocità, questi ultimi vengono regolati dalla viscosità. Se consideriamo il bordo di uscita

di un profilo alare con un angolo diverso da zero, la velocità deve essere necessariamente zero. Questo si traduce, considerando ad esempio un bordo di uscita a forma di cuspidi, nell'imporre che la velocità deve essere identica superiormente ed inferiormente il profilo aerodinamico. Questo ci permette di risalire all'unica soluzione che abbia un effettivo significato fisico e possiamo affermare di aver risolto il problema, ovvero troveremo una unica combinazione di intensità di doppiette e sorgenti ed anche la circolazione intorno al profilo. Grazie a quest'ultima, e tramite il teorema di Kutta-Joukowski:

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma \quad (1.47)$$

È possibile risalire alla portanza.

1.7.4 Step operativi

I passi da seguire in un metodo di risoluzione numerico di un flusso potenziale basato sul metodo a pannelli sono principalmente i seguenti:

1. Definizione e discretizzazione della geometria.
2. Imposizione delle condizioni al contorno su ogni pannello; per ogni punto di collocazione viene calcolata l'influenza delle sorgenti e delle doppiette di tutti gli altri pannelli della superficie.
3. Risoluzione del sistema, avente come incognite il valore di σ e μ su ogni pannello.
4. Calcolo della velocità indotta in ogni punto della distribuzione così calcolata e che, sommata a quella del flusso uniforme, assegna la velocità totale. Successivamente si derivano le grandezze ricercate, come pressione (con il teorema di Bernoulli) e quindi le forze aerodinamiche agenti sulla superficie in questione.

È necessario fare una precisazione sul punto 2: con la scelta di utilizzare due diverse distribuzioni di singolarità, una di doppiette ed una di sorgenti, si include comunque anche il caso che si voglia considerare una distribuzione

di vortici se si tiene presente l'equivalenza tra una distribuzione di vortici ed una di doppiette di un ordine superiore. L'opportunità di assumere distribuzioni di doppiette o di vortici dipende dal tipo di flusso che si sta analizzando. Occorre infatti considerare che, se è vero in generale che il trattamento di una distribuzione di ordine superiore pone maggiori problemi analitici, lavorare con la vorticità può dare notevolissime complicazioni a causa del carattere vettoriale di questo tipo di singolarità: conviene pertanto impiegare doppiette in campo tridimensionale e distribuzione di vortici in campo bidimensionale (dove la vorticità è associata ad una sola direzione perpendicolare al campo di moto, e quindi il suo carattere vettoriale nella sostanza perde di significato).

È possibile incrementare la precisione dei risultati ottenuti con tale metodo considerando, ad esempio, una distribuzione di sorgenti e doppiette che non sia costante sulla superficie del pannello, ma vari con una legge predeterminata, ad esempio lineare. Si possono avere così metodi del primo ordine, nel caso di densità costante, del secondo ordine, per distribuzione lineare, e di ordine superiore, in base alla accuratezza ricercata. Ovviamente, metodi più fini andranno ad influire sul tempo necessario al calcolo.

Capitolo 2

Le eliche

2.1 Generalità

Un'elica è costituita da due o più elementi fluidodinamici chiamati **pale**, le quali si comportano come "ali rotanti" che impongono una variazione di quantità di moto nella direzione della velocità di avanzamento, al contrario delle ali convenzionali, la cui variazione di quantità di moto è normale alla direzione di avanzamento. Le pale sono calettate su un mozzo opportunamente sagomato, e rotanti rispetto all'asse di rotazione di una generica velocità angolare Ω .

2.2 Cenni storici

La nascita delle eliche non ha una data precisa. La prima applicazione può essere ricondotta ad Archimede, che le utilizzò per il sollevamento di acqua per l'irrigazione in un dispositivo denominato *vite di Archimede*.

Successivamente Leonardo da Vinci utilizzò le eliche per un impiego che più si avvicina all'utilizzo moderno: costruì una specie di velivolo, la *Vite Aerea*, immaginata come una vite senza fine che si sarebbe dovuta "avvitare" nell'aria sfruttandone la densità similmente a quanto fa una vite che penetra nel legno. Il prototipo di elica non avrebbe potuto comunque funzionare, visto il peso teorico della macchina e l'energia insufficiente prodotta dai quattro

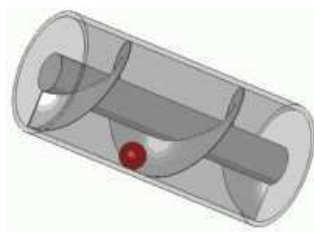


Figura 2.1: Vite di Archimede

uomini che avrebbero dovuto azionarla.

Le prime eliche utilizzate per la propulsione vennero sviluppate in campo nautico nel XVIII secolo, per sostituire la propulsione a ruota. Per studiare la resistenza agli avanzamenti degli scafi si utilizzavano i principi dell'idrodinamica teorica, basati essenzialmente sullo studio di diagrammi matematici di flusso che si potevano formare in varie combinazioni di campi di flusso. Le linee di flussi di alcuni campi matematici teorici potevano essere rese simili alla corrente attorno ad uno scafo, ma D'Alambert dimostrò che la resistenza teorica della forma matematica di scafo ad una corrente del genere era esattamente zero. Poiché, nella realtà pratica, gli scafi non presentano resistenza nulla, queste teorie divennero note come il paradosso di D'Alambert. In assenza quindi di teorie utilizzabili, le eliche marine furono sviluppate in modo intuitivo. L'elica venne assimilata ad una vite che avanza ruotando in un foro filettato.

2.3 Descrizione e classificazione

Un'elica è un organo intermedio in grado di trasformare la potenza meccanica di un albero rotante in variazione della quantità di moto di un fluido. Le eliche hanno il compito di spingere in senso contrario al moto una massa di fluido; di conseguenza, in accordo con il principio di azione e reazione, si determina una spinta nel senso del moto. Il moto impresso al fluido è detto elicoidale e risulta essere la combinazione di un moto assiale e di un moto rotazionale.

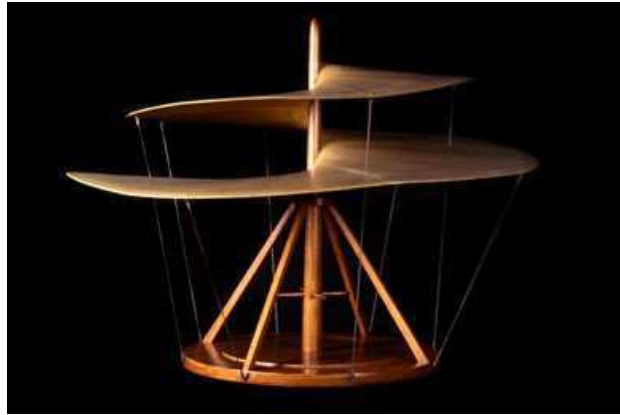


Figura 2.2: Vite aerea di Leonardo

Generalmente è formata da un mozzo su cui sono calettate due o più pale, aventi asse perpendicolare a quello del mozzo e sezioni sagomate come profili alari. La propulsione dell'elica deriva dalla messa in rotazione delle pale: esse, in maniera simile alle ali, producono una distribuzione di forze locali, la cui risultante fornisce essenzialmente la spinta, mentre il momento risultante bilancia la coppia fornita dal motore.

Possono essere classificate innanzitutto sulla base del tipo di ambiente fluido nel quale agiscono:

- *aeronautiche*: sono studiate per agire nell'aria, una miscela di gas e vapori. Sono caratterizzate soprattutto dalle alte velocità di rotazione e dalla sottigliezza delle pale, data la scarsa densità dell'aria;
- *marine*: al contrario delle precedenti, queste eliche agiscono all'interno di un fluido che ha una maggiore densità: l'acqua. Sono caratterizzate da velocità di rotazione più basse ma da pale più espanse.

Si possono inoltre suddividere in base alle modalità di funzionamento:

- *traenti*: sono poste sulla parte anteriore del motore e perciò studiate per fornire la propulsione risucchiando il fluido indisturbato che si trova davanti al mezzo nella direzione di avanzamento. Appartengono a questa tipologia la maggior parte delle eliche aeronautiche utilizzate

dagli aeromobili e alcune moderne applicazioni marine utilizzate sulle navi;

- *spingenti*: sono analoghe alle traenti, ma collocate nella zona posteriore del mezzo. Perciò esse incontrano anteriormente un fluido in moto non uniforme che risente del passaggio tra le superfici fluidodinamiche del mezzo. A questa tipologia appartengono le eliche marine utilizzate su tutti i tipi di imbarcazioni e alcune applicazioni aeronautiche;
- *portanti*: al contrario delle precedenti, questo tipo di eliche fornisce una spinta sustentatrice, cioè opposta alla forza di gravità. Sono perciò utilizzate sugli elicotteri.

2.4 Ambiti applicativi

Lo studio e la progettazione di un'elica trova riscontro in molti settori, in quanto può essere utilizzata in vari modi:

- per la propulsione, in ambito aeronautico o marino;
- per la ventilazione, indispensabili per il condizionamento di ambienti od il raffreddamento di parti elettroniche;
- per la produzione di energia elettrica.

Data la versatilità e gli innumerevoli campi applicativi, si può dedurre che non è affatto banale la progettazione di un'elica, così come non è sbagliato pensare che un piccolo errore nel dimensionamento si traduca in una riduzione sull'efficienza dell'intero sistema, sia esso un aereo od una turbina eolica.

2.5 Caratteristiche geometriche dei profili alari

Se supponiamo di sezionare una pala, al generico raggio r , con un piano normale al piano di rotazione, l'intersezione della pala con questo piano è un *profilo alare*. Come schematizzato in figura (2.3), quest'ultimo è formato

dalla *linea media* che divide il profilo alare in due porzioni di uguale area; dal *bordo di entrata* (o di attacco) e dal *bordo di uscita* che sono i punti estremi della linea media; dalla *corda* che è la linea retta tra i due bordi; dal *dorso* e *ventre*.



Figura 2.3: Elementi caratteristici di un profilo alare

La corda di un generico profilo alare è caratterizzata dall'angolo di calettamento geometrico θ , che rappresenta l'inclinazione della corda rispetto al piano di rotazione.

Il moto relativo dell'elemento di pala rispetto al fluido è costituito dal vettore Ωr che giace nel piano di rotazione e, perpendicolarmente ad esso, da un vettore di traslazione V_∞ .

È possibile esprimere la velocità angolare in funzione del numero di giri n :

$$\Omega = 2\pi r n \quad (2.1)$$

Il moto relativo risultante è quindi caratterizzato da una velocità effettiva pari a:

$$V_{eff} = \sqrt{[(2\pi n r)^2 + V_\infty^2]} \quad (2.2)$$

che investe il profilo con un angolo di attacco α pari a:

$$\alpha = \theta - \varphi = \theta - \arctan \frac{V_\infty}{2\pi n r} \quad (2.3)$$

Graficamente:

L'angolo di attacco può essere espresso in funzione del rapporto di funzionamento γ pari a:

$$\gamma = \frac{V_\infty}{nD} \quad (2.4)$$

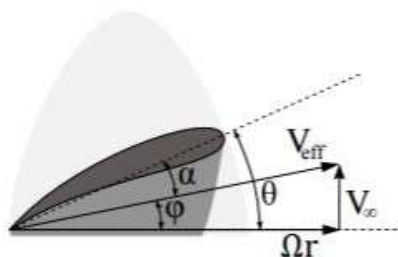


Figura 2.4: Relazioni angolari su un profilo alare

L'angolo φ definisce il passo aerodinamico p_a , proporzionale all'avanzo per giro:

$$p_a = 2\pi r \tan \varphi = \gamma D \quad (2.5)$$

Tramite semplici sostituzioni matematiche, si può giungere ad una nuova forma della V_{eff}

$$V_{eff} = \gamma n D \sqrt{\left[1 + \left(\frac{2\pi r}{D} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} \right]} \quad (2.6)$$

2.6 Le forze aerodinamiche agenti sull'elemento di pala

Le cause generanti forze aerodinamiche e momenti agenti su qualunque superficie aerodinamica, nel nostro caso sull'elemento di pala, sono:

- la distribuzione di pressioni, agente in direzione normale alla superficie del corpo;
- la distribuzione degli sforzi di taglio, agente in direzione tangenziale alla superficie del corpo.

Entrambe sono, dimensionalmente, una forza per unità di area. L'effetto combinato di pressione e sforzo di taglio, integrato sull'intera superficie, ci restituisce la *forza aerodinamica* ed il *momento aerodinamico*.

Le componenti della forza aerodinamica, esprimibili in funzione della direzione del flusso, sono:

- la portanza L , perpendicolare alla V_{eff} ;
- la resistenza D , parallela alla V_{eff} .

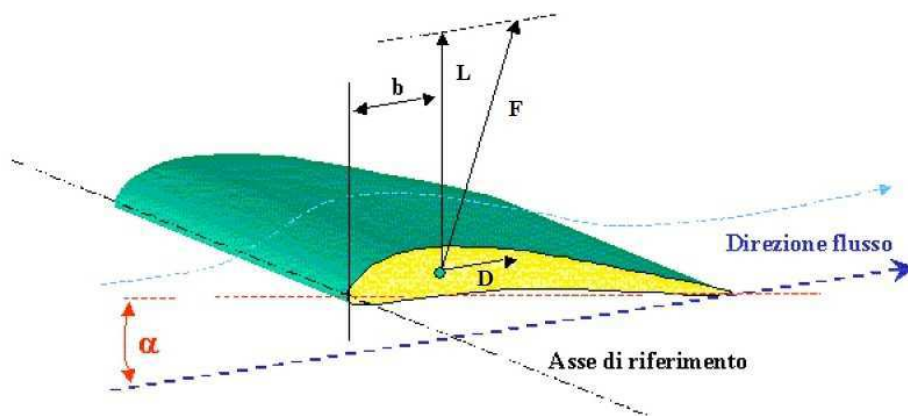


Figura 2.5: Componenti delle forze agenti su un profilo alare

La generazione della portanza può essere attribuita alla distribuzione di pressione intorno al corpo che attraversa il fluido. Su di un'ala, la produzione della portanza è dovuta alle differenze di pressione tra il ventre e il dorso. Nel caso di ala perfettamente allineata, non c'è generazione di portanza in quanto non è presente un gradiente di pressione tra ventre e dorso.

2.7 I coefficienti di Renard

La spinta, o la trazione, necessaria alla propulsione di un aeromobile è ottenuta proiettando una massa fluida nel verso opposto alla direzione del moto. La trazione nasce, per il principio di azione e reazione, come reazione alla forza che deve essere esercitata sulla massa per accelerarla. Nel caso dei propulsori ad elica (motoelica e turboelica) l'elica chiama a sé e poi proietta all'indietro aria ambiente. La spinta, la coppia e la potenza di un'elica vengono ricavate tramite le *formule di Renard*:

$$T = C_T \rho n^2 D^4 \quad (2.7)$$

$$Q = C_Q \rho n^2 D^5 \quad (2.8)$$

$$P = Q\Omega = C_P \quad (2.9)$$

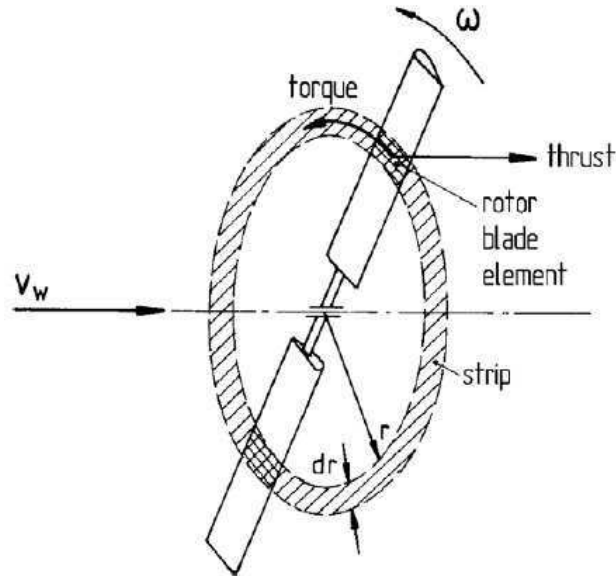


Figura 2.6: Genesi della spinta

Come tutte le forze aerodinamiche la spinta T di un'elica deve essere espressa in funzione di:

- una pressione dinamica proporzionale a $(nD)^2$;
- una superficie di riferimento, proporzionale a D^2 ;
- un coefficiente adimensionale dipendente dall'angolo di attacco ovvero il rapporto di funzionamento, oltre che dai numeri di Reynolds e Mach.

I coefficienti C_T , C_Q e C_P vengono definiti *coefficienti di Renard*:

$$C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} = C_T(\gamma) \quad (2.10)$$

$$C_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} = C_Q(\gamma) \quad (2.11)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho n^3 D^5} = C_P(\gamma) \quad (2.12)$$

Questi coefficienti risultano di fondamentale importanza in quanto, grazie ad essi, è possibile risalire a caratteristiche fondamentali di un'elica come il rendimento, come esposto nel paragrafo successivo.

2.8 Rendimento e curve caratteristiche

Il rendimento è un numero adimensionale presente in molti rami dell'ingegneria e rappresenta l'efficienza di un qualunque sistema. Nel caso delle eliche, è pari al rapporto tra la potenza sviluppata e la potenza assorbita:

$$\eta = \frac{TV}{Q\Omega} = \frac{C_T}{C_Q}\gamma \quad (2.13)$$

Le curve che rappresentano il rendimento ed i coefficienti di spinta, potenza e coppia in funzione del rapporto di funzionamento sono definite *curve caratteristiche di un'elica*.

Come si osserva dalla Figura(3.4), all'aumentare di γ l'angolo di attacco di tutti gli elementi di pala diminuisce, ed è lecito prevedere una diminuzione del coefficiente di spinta C_T ; per un dato valore di $\gamma = \gamma_1$ la spinta si annulla (l'angolo tra la velocità effettiva e la retta di portanza nulla dell'elemento di pala è piccolo). Se si considera che il maggiore contributo alla spinta deriva dalla portanza sviluppata dai profili, non è difficile comprendere che il coefficiente di spinta di un'elica assuma un andamento prossimo a quello lineare (con leggera curvatura verso il basso per la riduzione di inclinazione della forza aerodinamica).

Per $\gamma > \gamma_1$ la spinta risulterà negativa e l'elica si comporta come elica frenante. Per quanto riguarda i coefficienti di coppia e di potenza è immediato prevedere che anche questi coefficienti dovranno decrescere all'aumentare del rapporto di funzionamento, con una legge approssimativamente quadratica dal momento che il maggior contributo alla coppia resistente, e quindi alla potenza assorbita, è da ascrivere alla resistenza aerodinamica degli elementi di pala; si ha poi che il valore di $\gamma = \gamma_2$ per cui si annulla la coppia e la

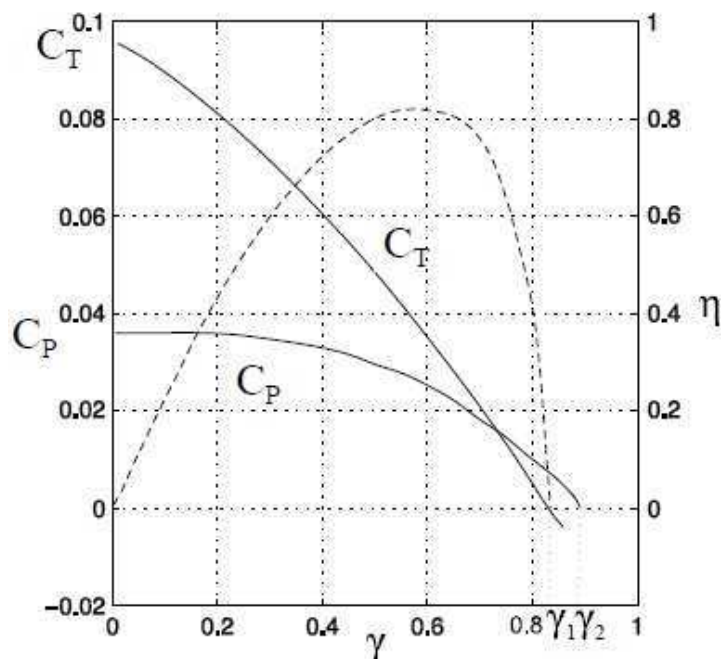


Figura 2.7: Curve caratteristiche di un'elica

potenza deve essere più elevato del valore $\gamma = \gamma_1$ per cui si annulla la spinta, se si segue la continua rotazione del vettore risultante delle forze aerodinamiche all'aumentare del rapporto di funzionamento. Per $\gamma > \gamma_2$, la coppia da resistente diventa motrice e l'elica anziché assorbire una coppia all'albero (elica mossa), cede una coppia all'albero (elica motrice). Se si considera che, per definizione, $\eta = 0$ per $\gamma = 0$ e per $\gamma = \gamma_1$, si conclude che il rendimento dovrà raggiungere un valore massimo tra questi due valori (generalmente per $\gamma \simeq 0.7 \div 0.8\gamma_1$).

2.9 Le eliche ciclodali

Un ciclorotore è una particolare tipologia di dispositivo per la propulsione, che converte la potenza dell'albero in accelerazione del fluido utilizzando delle pale rotanti, ma con asse perpendicolare rispetto alla direzione del flusso. La spinta viene prodotta dall'azione combinata della rotazione delle pale rispetto ad un punto, il centro di rotazione, e dall'oscillazione delle singole pale con

conseguente variazione dell'angolo di attacco. La spinta generata è di gran lunga superiore rispetto a qualunque altro tipo di propulsore, anche a basse velocità. Il problema principale dell'utilizzo dei ciclorotori risiede nel fatto che sono caricate a flessione, rispetto al carico assiale delle eliche tradizionali. Strutturalmente questo si traduce in un incremento della resistenza di ogni singola lama, o con l'introduzione di sistemi di supporto intermedi. Ogni soluzione adottata si traduce in un incremento di costi notevoli rispetto alle eliche tradizionali ad asse parallelo.

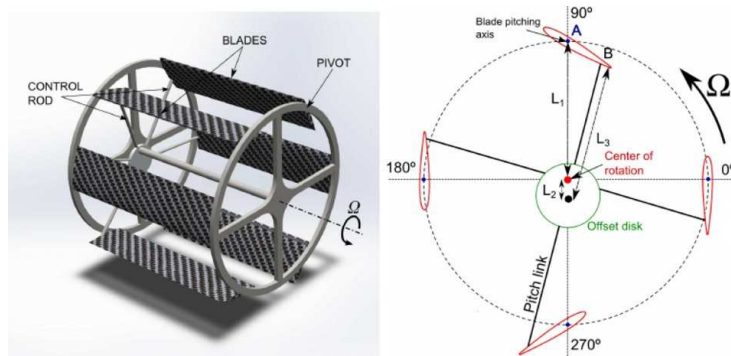


Figura 2.8: Schematizzazione di un ciclorotore

Capitolo 3

Risultati numerici

Le simulazioni sono state effettuate su differenti geometrie: un'ala a pianta rettangolare NACA0012 ed un'elica. La scelta non è casuale: l'accoppiamento tra queste due geometrie è presente (seppur con differenze) su un aeromobile reale: l'Alenia C-27J Spartan. Sono state studiate inizialmente le singole componenti ponendo particolare attenzione alle fenomenologie e alle problematiche derivanti dall'effetto di flussi non assiali.

3.1 Il codice PaMS

Il codice utilizzato per le simulazioni è il **PaMS** (**P**anel **M**ethod **S**olver) scritto dall'ingegner Paolo Caccavale ed utilizzato in avanzoprogetto da Alenia. È un innovativo metodo a potenziale per analisi fluidodinamiche, scritto in linguaggio Fortran per la risoluzione di campi di moto a potenziale utilizzando il metodo a pannelli. L'architettura è stata strutturata in modo tale da poter garantire gli obiettivi richiesti in un normale ciclo di progettazione: affidabilità dei risultati, relativa facilità anche per utenti non esperti, tempi e potenze di calcolo non eccessivi. Per una descrizione approfondita dell'architettura, si rimanda a [3]

In Figura (3.1) è riportata una rappresentazione di un tipico flusso di lavoro da seguire per effettuare una simulazione con il codice PaMS.

Il primo passo riguarda l'elaborazione del modello CAD dell'oggetto di in-

teresse. Successivamente bisogna convertire il modello CAD in un modello discreto o pannellato, sfruttando software commerciali specifici come Hypermesh o Gambit. In alcuni casi è possibile sfruttare la stereolitografia, uno dei possibili formati di output dei software CAD. Successivamente, è necessario tradurre i modelli discreti nel formato *'geo'* previsto in input per il codice PaMS. A tal fine è stata realizzata una routine (*converter*) capace di convertire nel formato utile a PaMS le mesh generate da altri formati. È possibile leggere mesh nei formati *'neu'* (Gambit), *'nas'* (Nastran), *'stl'* (stereolitografia) e di generare in output il corrispondente file con la geometria per PaMS. Infine è sufficiente impostare il file di input, chiamato *'DATAIN.dat'*

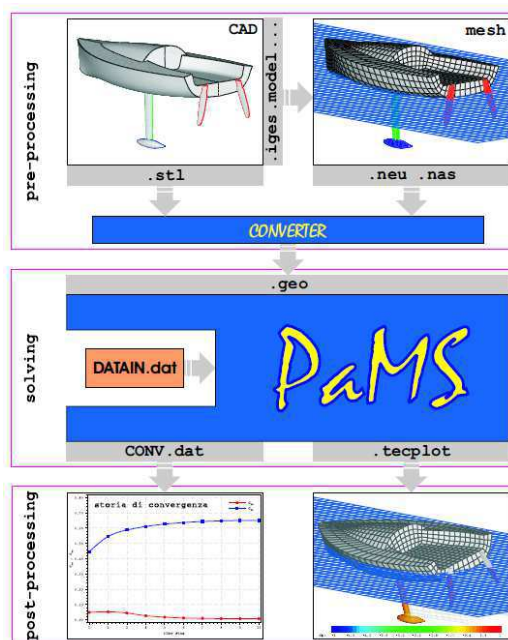


Figura 3.1:

per effettuare una simulazione con PaMS. Una rappresentazione del file di input è mostrata in Figura (3.2). È un semplice ed intuitivo file di testo che contiene le caratteristiche geometriche e fisiche dell'oggetto considerato. I risultati, in termini di campi di velocità e pressione, possono essere visualizzati attraverso l'impiego di Tecplot, mentre per l'analisi della storia di convergenza delle componenti delle forze globali può essere utilizzato un

```

-----
&RUN      runname="PaMS test"                                &END
&INFTY    velinf(1)= 1.0   velinf(2)= 0.0   velinf(3)= 0.0   &END
&INFTY    omginf(1)= 0.0   omginf(2)= 0.0   omginf(3)= 0.0   &END
&TIME     dt=1.0          tstart=0.0       tend=5.0         &END
&TIME     nkwt=3
&INVERTER omegainv=1.2     convinv=0.000001 maxiter=100      &END
&BODY     nbody=1         relmot='N'        inters='N'        &END
&BODY     symplane=0
-----
&GEO      geoname="filename.geo"                            &END
&SCALE    sclfac(1)=1.0   sclfac(2)=1.0   sclfac(3)=1.0   &END
&GEOR     georot(1)=0.0   georot(2)=0.0   georot(3)=0.0   &END
&SYSC     syscen(1)=0.0   syscen(2)=0.0   syscen(3)=0.0   &END
&SYSR     sysrot(1)=0.0   sysrot(2)=0.0   sysrot(3)=0.0   &END
&SYSV     sysvel(1)=0.0   sysvel(2)=0.0   sysvel(3)=0.0   &END
&YSO      sysomg(1)=0.0   sysomg(2)=0.0   sysomg(3)=0.0   &END
&KWAKE    ang=160.       ntsrigid =0
&BC       bctype='D'
-----

```

Figura 3.2: esempio di file DATAIN.dat

qualsiasi software per grafici bidimensionali.

3.2 Il profilo NACA0012

Il profilo alare NACA0012 è caratterizzato da perfetta simmetria rispetto alla corda che, quindi, si sovrappone alla linea media. Le simulazioni sono state effettuate ad un numero di Reynolds pari a 500.000, calcolando il coefficiente di portanza al variare dell'angolo di incidenza. Come descritto nel paragrafo (2.6), ad un angolo di incidenza nullo il coefficiente di portanza è anch'esso nullo: essendo il profilo simmetrico non c'è un gradiente di pressione tra ventre e dorso, e quindi non c'è generazione di portanza. Sono stati confrontati i risultati delle simulazioni con i dati di un tool online, airfoiltools. Esso si basa su un metodo a pannelli con una geometria 2D.

Come è possibile osservare dal grafico in Figura(3.3), i dati ottenuti sul coefficiente del momento sono estremamente in accordo, mentre per il coefficiente di portanza sono in accordo per angoli di attacco non molto elevati, sia negativamente che positivamente. Per angoli superiori ai 10 gradi, infatti, la discrepanza tra i dati risulta essere rilevante; sperimentalmente è infatti pos-

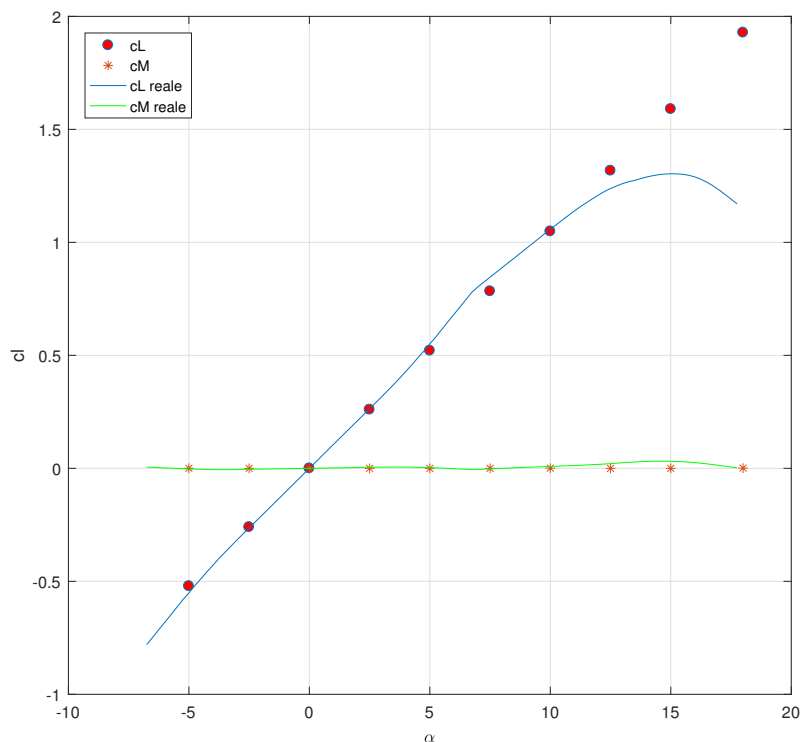


Figura 3.3: Confronto tra coefficienti reali e simulati

sibile notare come, per un valore di α intorno ai 15 gradi, il coefficiente di portanza subisca una brusca riduzione, dovuta principalmente al fenomeno dello stallo aerodinamico, fenomeno fisico che ovviamente non è contemplato nella teoria potenziale e che dipende dal numero di Reynolds. Lo stallo aerodinamico si ha quando il punto di separazione del flusso sul dorso sia avanzato, rispetto alla direzione della corrente stessa, al punto che il flusso sia separato sulla quasi totalità del dorso del corpo.

Nel grafico in Figura(3.4) sono rappresentate le curve del coefficiente di resistenza al variare dell'angolo di incidenza. Come si nota, c'è una forte discrepanza tra i risultati. Questo perchè il coefficiente di resistenza reale è costituito da un contributo *viscoso* ed un contributo *indotto*. Il contributo indotto esiste solo nel caso di geometria tridimensionale, quindi non è contemplato in airfoiltools. Viceversa, i contributi viscosi non possono essere

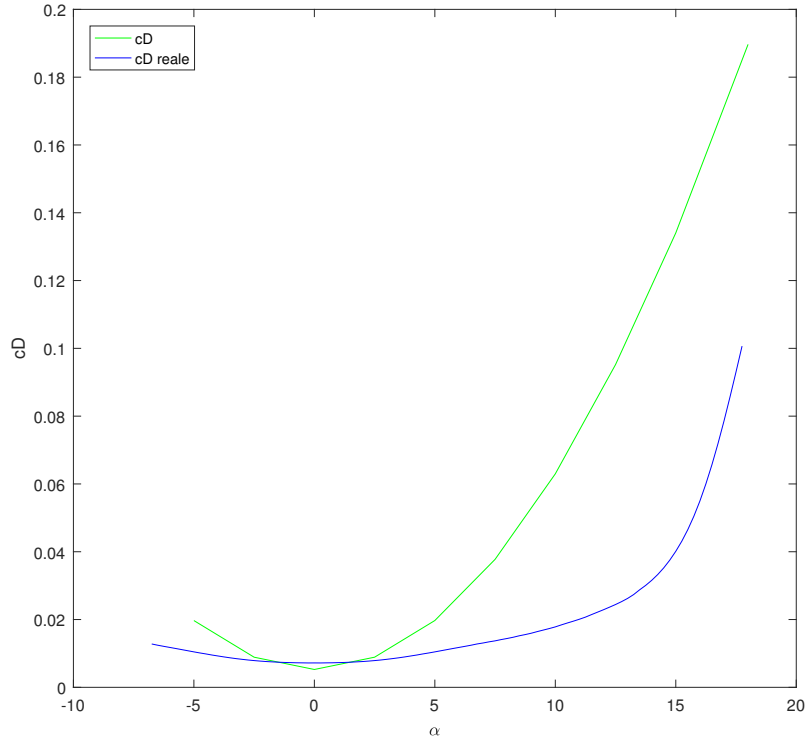


Figura 3.4: Coefficiente di resistenza

calcolati con un codice basato solo sul metodo a pannelli per le ipotesi su cui è fondato (irrotazionalità, idealità del fluido, incomprimibilità), ma vengono inglobati in airfoiltools tramite un calcolo di strato limite integrale.

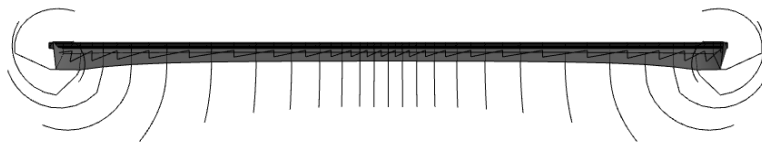


Figura 3.5: Vortici di estremità simulati

In Figura 3.4, inoltre, viene mostrata un'immagine della parte posteriore dell'ala esportata direttamente da Tecplot. È interessante notare come il metodo a pannelli riesca a simulare molto bene la scia a valle del profilo,

prevedendo anche la formazione dei vortici d'estremità. Questi ultimi sono vortici che si formano a causa della differenza di pressione tra dorso e ventre dell'ala (quindi a causa della generazione di portanza) e causano la nascita del contributo di resistenza indotta; risulta quindi evidente, al fine di aumentare l'efficienza dell'ala stessa, la necessità di diminuire l'intensità di tali vortici, problema che viene risolto in parte mediante l'utilizzo delle cosiddette alette d'estremità o *winglets*, comunemente presenti su molti aerei di linea.



Figura 3.6: Vortici di estremità reali, visibili per effetto della condensazione del vapore acqueo

3.3 L'elica singola

Le pale dell'elica operano nell'aria come le ali degli aerei, ma mentre queste ultime sono investite da una corrente d'aria di velocità pari a quella di volo dell'aeromobile, le pale dell'elica sono interessate da una corrente la cui velocità è la risultante delle velocità del moto rotatorio intorno al mozzo e traslatorio, da cui ne deriva un moto risultante di tipo elicoidale.

Le simulazioni hanno riguardato un'elica singola a differenti inclinazioni di 10 e 20 gradi, con una velocità del flusso pari a 1 m/s. Sono state calcolate le componenti delle forze ed il momento, adimensionalizzate secondo le formule di Renard ed è stato riportato il loro andamento in funzione del tempo su

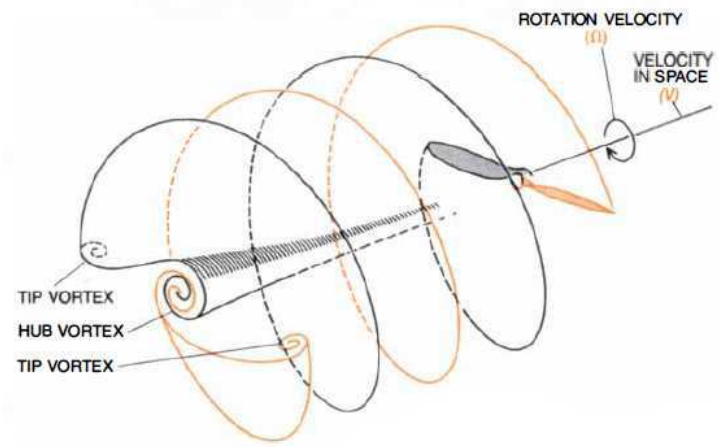


Figura 3.7: Moto elicoidale generato da un'elica

differenti grafici. In caso di flusso perfettamente assiale, come si osserva dai grafici in figura (3.8), (3.9) e (3.10), le uniche componenti presenti di forza e momento saranno quelle assiali. In caso di elica inclinata si nota che sono presenti anche le altre componenti, aventi un andamento periodico con ampiezza crescente all'aumentare dell'angolo di inclinazione e della velocità. Un aeromobile moderno volerà sicuramente a velocità molto maggiori rispetto alla casistica studiata, con generazione di forze e coppie via via crescenti. La variazione periodica delle forze influisce negativamente sull'efficienza dell'elica stessa, essendo quest'ultimo funzione della forza e coppia assiale. Inoltre, come si vedrà nel paragrafo successivo, la periodicità delle grandezze in esame è alla base della generazione di fenomeni vibratorii.

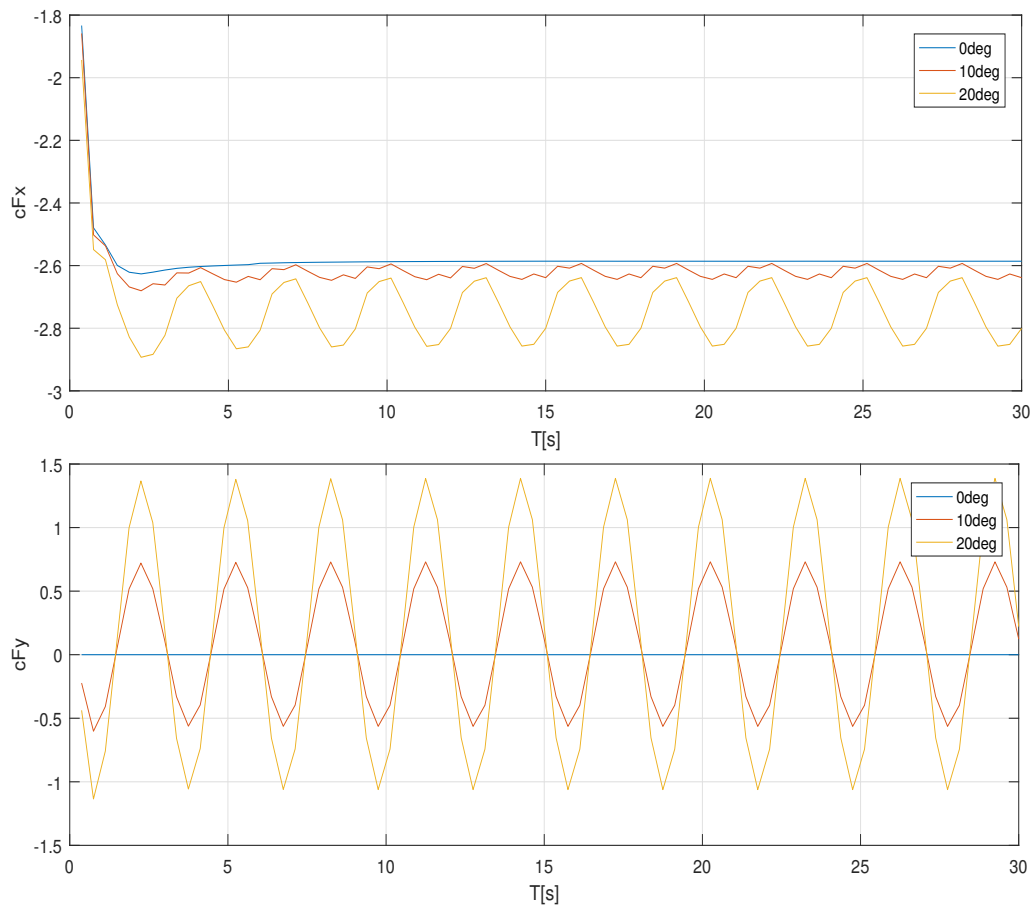


Figura 3.8: Andamento F_x e F_y solo elica

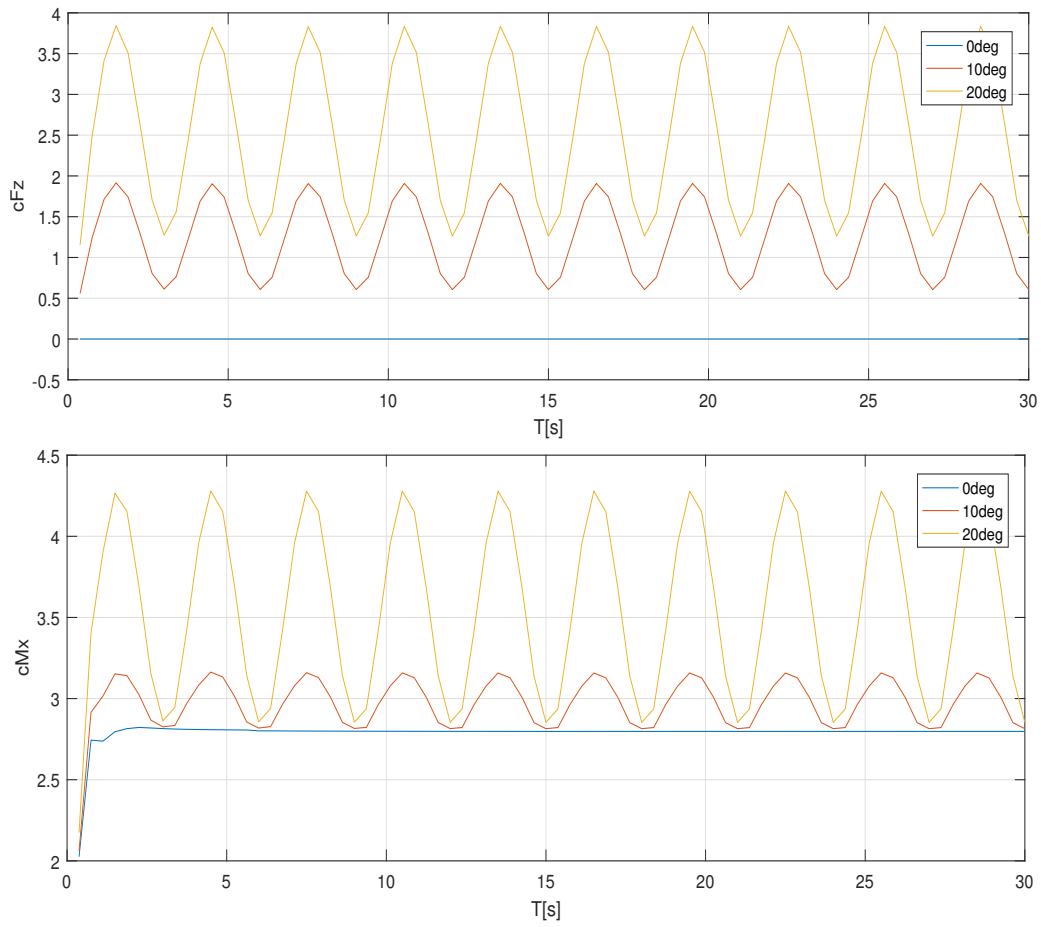


Figura 3.9: Andamento Fz e Mx solo elica

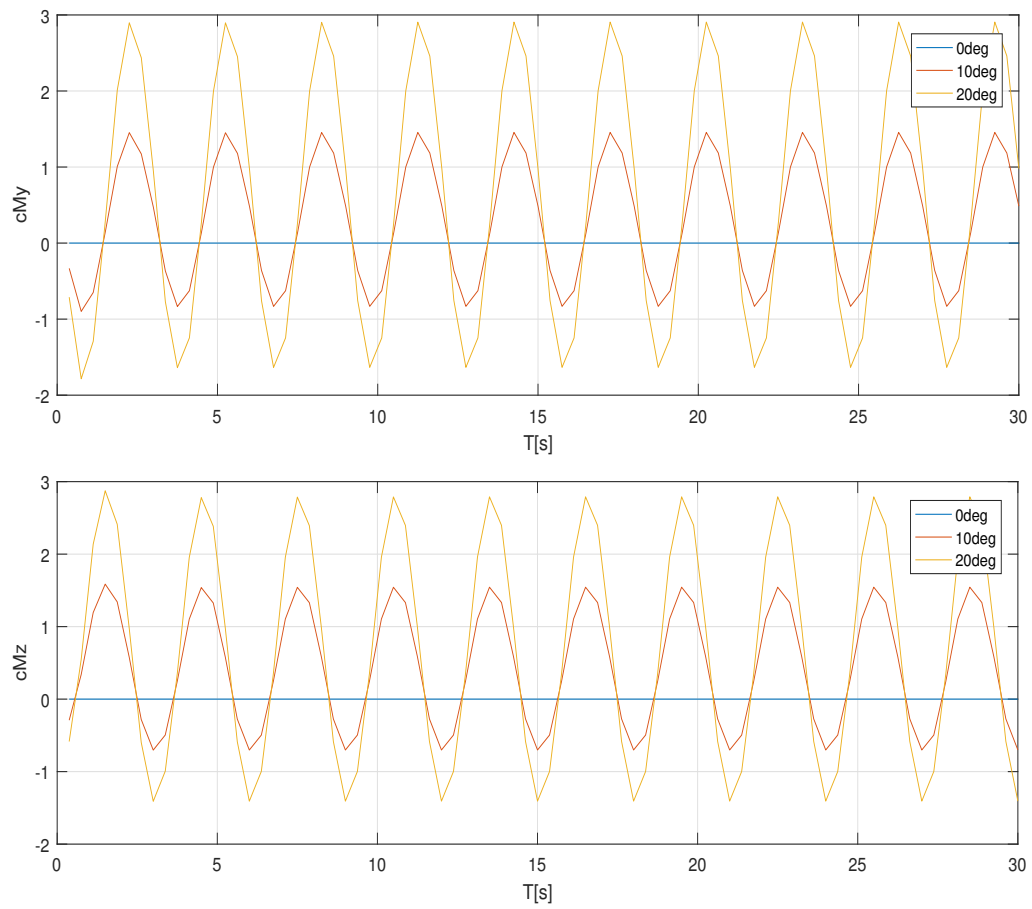


Figura 3.10: Andamento M_y e M_z solo elica

3.4 Il caso reale: l'Alenia C-27J Spartan

Il caso reale preso in esame, come descritto in precedenza, è l'accoppiamento ala-elica presente sull'Alenia C-27J Spartan.



Figura 3.11: Alenia C-27J Spartan

Inizialmente sono state studiate le caratteristiche dell'elica, con il flusso in direzione perfettamente assiale a differenti velocità e ne sono state calcolati i parametri fondamentali esposti in precedenza al paragrafo (2.7): i coefficienti di Renard di spinta C_T , di coppia C_Q e di potenza C_P necessari per il calcolo del rendimento η in funzione del rapporto di funzionamento γ . Le simulazioni sono state effettuate su un modello a 2 pale rispetto alle 6 del caso reale, che presentano anche una configurazione particolare. Sono definite a *scimitarra*. Non essendo possibile risalire ai dati sperimentali per ragioni di brevetto, sono stati confrontati i risultati simulati con i dati sperimentali riscaldati da 6 a 2 pale. In Figura(3.12) sono stati riportati gli andamenti dei coefficienti di spinta e coppia. I risultati delle simulazioni evidenziano degli andamenti molto simili alla casistica reale, con una discrepanza di circa il 10% per quanto riguarda il coefficiente di spinta. Il coefficiente di coppia invece possiede dei valori molto differenti, principalmente dovuto al riscaldamento dei dati che funziona egregiamente per la spinta, meno per la coppia. Però, seppur la

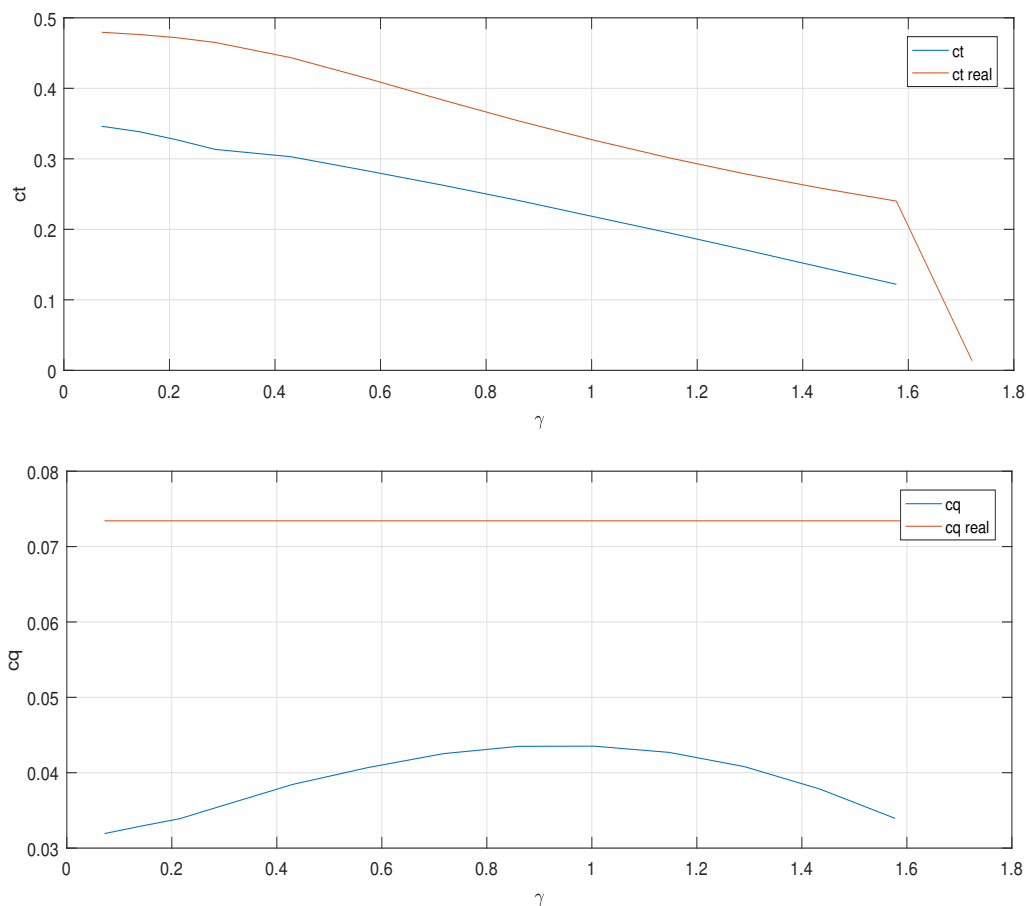


Figura 3.12: Confronto fra i coefficienti

differenza sia maggiore rispetto al coefficiente di spinta, l'andamento rimane pressochè lineare dato i bassi valori percepiti.

In Figura (3.13) sono riportati gli andamenti del rendimento che è pari a:

$$\eta = \frac{C_T}{C_Q} \gamma \quad (3.1)$$

Come ci si aspetta, anche il rendimento ottenuto tramite simulazione segue linearmente il rendimento reale fino ad un valore di γ di circa 1.6. A partire da questo valore, essendo le velocità in gioco molto elevate (circa sui 150 m/s), non possono essere trascurati gli effetti della comprimibilità dell'aria che non

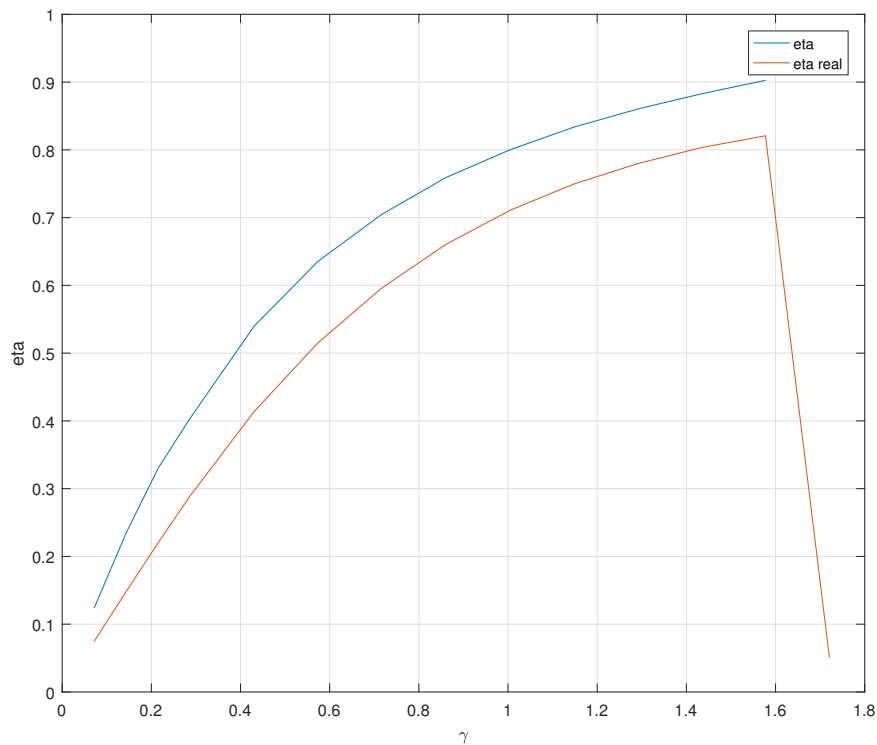


Figura 3.13: Confronto fra i rendimenti

sono tenuti in considerazione nella teoria a potenziale su cui si basa il metodo utilizzato, che prevede flussi incomprimibili. Una velocità pari o superiore ai 150 m/s, essendo generalmente lenti i velivoli ad elica, è indicata come velocità limite per i problemi strutturali che ne derivano. I valori ricavati sono stati riportati anche in forma numerica.

C_T	C_{Treal}	η	η_{real}
0.3594	0.479522376	0.1208	0.074536814
0.3314	0.476291432	0.2297	0.148069194
0.3164	0.471717759	0.3241	0.219971
0.3044	0.46504607	0.3985	0.289146486
0.2838	0.443478473	0.5346	0.413604964
0.2632	0.41431606	0.6313	0.515209312
0.2414	0.383559156	0.7018	0.5962032
0.2182	0.354019102	0.7566	0.660343472
0.1952	0.3265351	0.7985	0.710591251
0.1712	0.301358917	0.8326	0.749490232
0.1466	0.278658391	0.8598	0.803416587
0.1223	0.24001295	0.8826	0.820765898
0.0967	0.013595139	0.9196	0.050728166

Inoltre, anche se il flusso arriva in modo perfettamente assiale all'elica, gli andamenti di forza e momenti sono quelli caratteristici di un'elica in flusso non assiale causati dall'interferenza tra l'ala e l'elica.

È stata effettuata un'ulteriore simulazione ad una velocità di 50 m/s, in cui si nota l'andamento periodico dei momenti, rappresentati in Figura(3.14) e (3.15). È interessante notare come le oscillazioni maggiori siano relative alla componente del momento assiale e siano dello stesso ordine di grandezza dell'elica non accoppiata. Superato un certo valore, potrebbero presentarsi danni al motore o, in casi più gravi, la rottura dell'elica stessa. Le altre componenti provocano dei fenomeni vibratori che, date le alte potenze in gioco, potrebbero incidere dannosamente sulla struttura in esame.

Nel settore aeronautico l'esigenza di contenere tali vibrazioni è molto sentita, non solo per evitare problemi di tipo strutturale ma anche per evitare danni alle apparecchiature elettroniche di supporto al volo mettendo a rischio la sicurezza del trasporto aereo o, nel caso dell'aviazione civile, per garantire il comfort ai passeggeri cercando di smorzare le vibrazioni ed una parte del rumore.

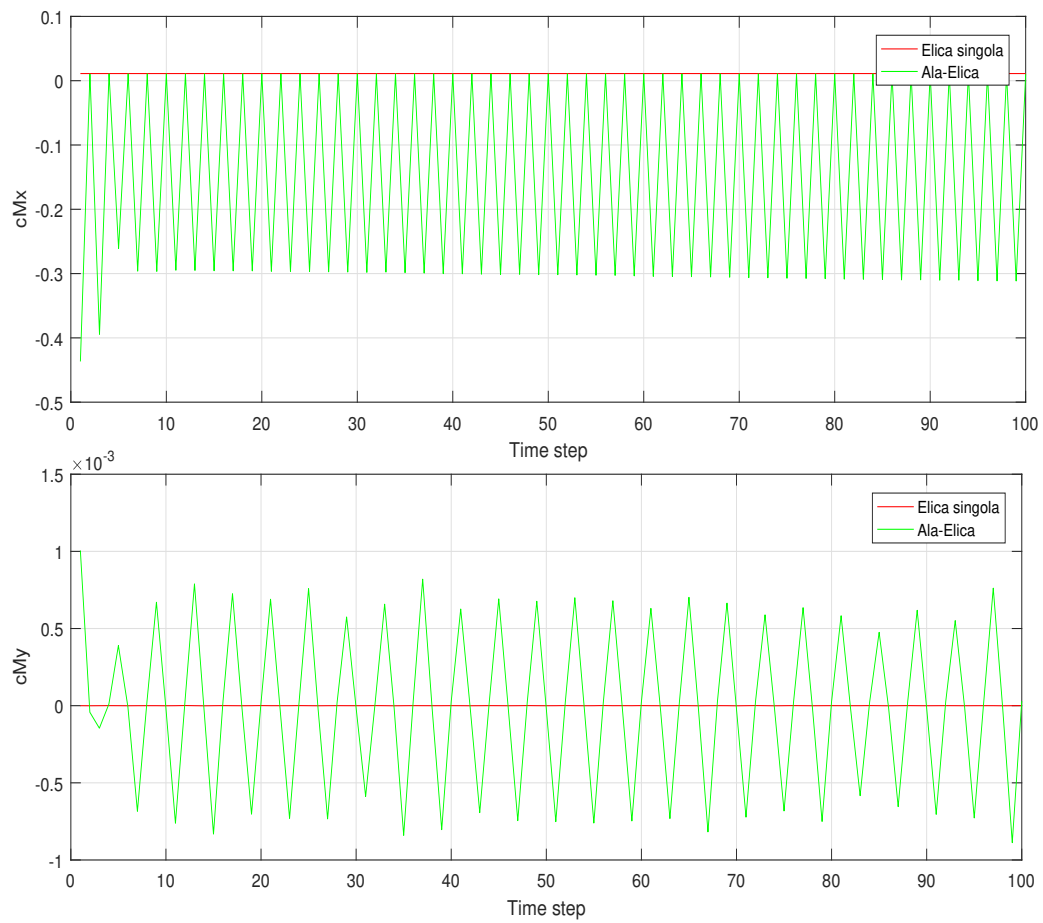


Figura 3.14: Componenti Mx ed My sull'accoppiamento ala-elica

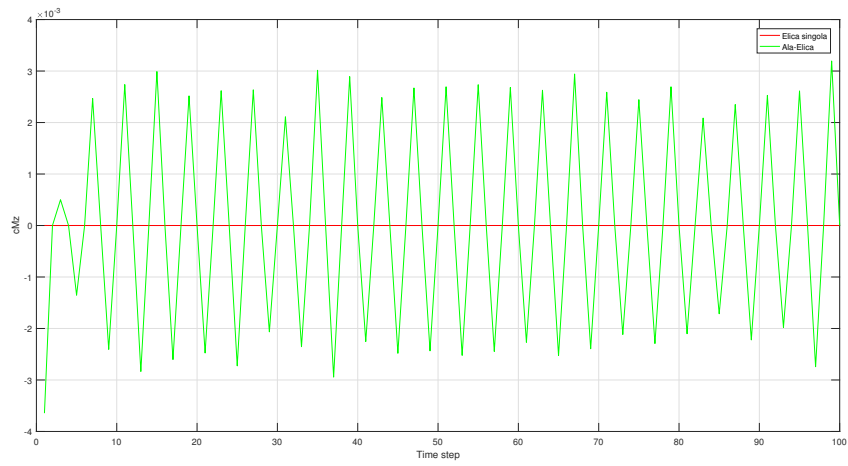


Figura 3.15: Componente M_z sull'accoppiamento ala-elica

Conclusioni

Lo studio effettuato in questa tesi è di tipo preliminare ma consente comunque di stimare le potenzialità del metodo preso in esame. I dati ricavati evidenziano una buona accuratezza con errori percentuali nell'ordine del 10% rispetto ai dati sperimentali riscalati.

Tenendo in considerazione i limiti della trattazione a potenziale, il metodo a pannelli implementato in PaMS si è rivelato uno strumento flessibile e potente per la trattazione di geometrie complesse e può essere utilizzato per valutare gli effetti di accoppiamento tra elica, ala e fusoliera.

Appendici

Condizioni al contorno

Un'equazione differenziale ammette spesso infinite soluzioni che differiscono a meno di costanti additive e/o moltiplicative. L'imposizione di condizioni aggiuntive è necessaria per individuare una particolare soluzione. Nello specifico, una condizione al contorno è l'assegnazione del valore della soluzione di un'equazione differenziale ai margini dell'insieme di definizione dell'equazione.

Ci sono diversi tipi di condizioni, ma le più comuni sono quelle di Dirichlet e quelle di Neumann. Assegnando entrambi i valori prendono il nome di condizioni al contorno di Cauchy.

Condizione di Dirichlet

Una condizione al contorno di Dirichlet, il cui nome è dovuto al matematico Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), è una particolare condizione al contorno imposta in un'equazione differenziale, ordinaria o alle derivate parziali, che specifica i valori che la soluzione deve assumere su una superficie. Nel caso di equazione alle derivate parziali, in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, come ad esempio:

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{2}$$

In cui $\nabla^2 y$ rappresenta il laplaciano di y , la condizione prende la forma:

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{3}$$

dove f è una funzione nota definita in $\partial\Omega$, che è il contorno del dominio Ω .

Condizione di Neumann

Le condizioni al contorno di Neumann, così chiamate in onore di Carl Gottfried Neumann, quando vengono imposte su una equazione differenziale ordinaria o una alle derivate parziali, specificano i valori che la derivata di una soluzione deve assumere sul contorno del dominio.

Nel caso di equazione alle derivate parziali, in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, come ad esempio:

$$\nabla^2 y = 0 \tag{4}$$

In cui $\nabla^2 y$ rappresenta il laplaciano di y , la condizione prende la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{5}$$

Identità di Green

Si vogliono introdurre in questo paragrafo alcune proprietà fondamentali delle funzioni, armoniche e non, che ammettono un potenziale. Tali proprietà possono essere ottenute a partire dal Teorema della Divergenza che, per un vettore \mathbf{V} definito in un dominio V chiuso, di contorno S , si può scrivere come, Fig. B.1,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V} dV = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS \quad (6)$$

La prima identità

Se si applica il teorema della divergenza alla grandezza $A\nabla\phi$, essendo A e ϕ due funzioni scalari, definite e continue in V , insieme alle derivate prime per A e alle derivate prime e seconde per ϕ , si ha la Prima Identità di Green:

$$\int_V A\nabla^2\phi dV + \int_V \nabla A \cdot \nabla\phi dV = \int_S A \frac{\partial\phi}{\partial n} dS \quad (7)$$

La seconda identità

Si suppone che anche la funzione A sia derivabile due volte in V ; applicando la Prima Identità alle grandezze $\phi\nabla A$ e $A\nabla\phi$ e sottraendo si ottiene la Seconda Identità di Green:

$$\int_V (\phi\nabla^2 A - A\nabla^2\phi) dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) dS \quad (8)$$

Se A e ϕ sono armoniche si ottiene:

$$\int_S \left(\phi \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (9)$$

La terza identità

Sia P un punto arbitrario di V , e sia r la distanza tra P e un altro punto Q variabile in V , essendo $r = (Q - P)$, Fig. B.2. La Terza Identità di Green si ricava assumendo $A = 1/r$ (che è una funzione armonica) e applicando la Seconda Identità al dominio $V' = V - V''$, con frontiera $S' = S \cup S''$ essendo V'' una (piccola) sfera di centro P e raggio v , con superficie S'' , ed avente la relativa normale n'' orientata verso l'interno, Fig. B.2:

$$- \int_{V'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dV = \int_{S'} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS \quad (10)$$

Questa relazione può essere scritta come:

$$- \int_{V'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dV = \int_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS + \int_{S''} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS \quad (11)$$

Si tenga presente che quando $Q \in S''$ è $r = v$ e quindi:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n''} = - \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (12)$$

mentre inoltre su S è $dS = v^2 d\Omega$, essendo $d\Omega$ l'angolo solido sotteso dall'elemento di superficie dS ; si ha pertanto:

$$\int_{S''} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS = \int_{\Omega''} \left[\phi \left(\frac{1}{v} \right)^2 + \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right] v^2 d\Omega = 4\pi \bar{\phi} + \int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial v} d\Omega \quad (13)$$

essendo $\bar{\phi}$ il valore di ϕ di un opportuno punto della superficie della sfera di centro P . Quando si passa al limite per $v \rightarrow 0$, $\bar{\phi} \rightarrow \phi(P)$, mentre l'ultimo integrale si annulla e l'integrale di volume della (B.6) tende all'integrale su

V . La (B.4) si scrive allora:

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla^2 \phi}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (14)$$

È questa la Terza Identità di Green, in virtù della quale un potenziale ϕ può essere definito, in un qualunque punto P del suo dominio di definizione V , in funzione del valore che assume sulla frontiera e del suo laplaciano all'interno del dominio (si noti peraltro che è necessario calcolare comunque un integrale di volume).

Se il potenziale ϕ è armonico in V , il suo valore in qualunque punto di V può essere espresso in funzione del valore di ϕ sulla frontiera S :

$$\nabla^2 \phi \Leftrightarrow \phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (15)$$

Affinchè un potenziale sia armonico in V occorre pertanto che sia verificata la (B.10); viceversa, se una funzione potenziale verifica la (B.10), essa è armonica.

Bibliografia

- [1] J.D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering. McGraw-Hill, 2011.
- [2] J.D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering. McGraw-Hill, 2011.
- [3] Paolo Caccavale. “Un moderno metodo a potenziale per analisi fluidodinamiche”. Tesi di dott. Università degli Studi di Napoli Federico II, 2007.
- [4] E. Larrabee. “The screw propeller”. In: *Scientific American* 243 (1980), p. 134.
- [5] P. Luchini e M. Quadrio. *Dispense del corso di Aerodinamica.*, 2003.
- [6] R. Tognaccini. *Appunti del corso di Aerodinamica dell'ala rotante.*, 2015.